UNIVERSITATEA TEHNICĂ
DIN CLUJ-NAPOCA

SEMNALE, CIRCUITE SI SISTEME
Partea I
2003-2004

Curs: Prof. dr. ing. Marina Dana TOPA
Seminar & Laborator: Asist. ing. Ioana POPESCU

Structura disciplinei de Semnale, circuite si sisteme:

SCS I - sem.3 ~ Teoria Semnalelor – 2C 1S 1L
SCS II - sem. 4 ~ Teoria sistemelor – 2C 1S
SCS III - sem. 5 ~ Analiza si sint. circuitelor electrice – 2C 1S 2L

Nota finală:

SCS I & SCS III: 60%E + 30%L + 1p (+ bonus < 20%)

SCS II: 80%E + 10%S + 1p (+ bonus < 20%)

Examenul constă dintr-o probă scrisă şi va viza cunoaşterea teoriei şi abilitatea rezolvării problemelor, în proporții aproximativ egale.

Proba scrisă va fi combinată: grilă + cerere de enunțuri sau expresii + rezolvare de probleme cu mersul complet + rezolvare de probleme doar cu rezultat.

Cunoştințele dobândite la SCS I şi II **trebuie stăpânite cel puțin până la examenul de SCS III, altfel se sancționează la examen, prin notare negativă.**

Gafele monumentale **ca şi** ***necunoaşterea noțiunilor de matematică*** **se sancționează, şi ele, cu note negative.**

Notele L şi S **vor fi acordate de asistenți, care pot propune şi** ***bonusuri*** **pentru activitatea de la laborator şi seminar.**

Bibliografie pentru curs:

- V. Popescu, *Semnale, circuite şi sisteme,Partea I. Teoria semnalelor*, Editura Casa Cartii de Stiinta, Cluj-Napoca, 2001.
- Gh. Cartianu, M. Săvescu, I. Constantin, D. Stanomir, *Semnale, circuite şi sisteme*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1980.
- Adelaida Mateescu, *Semnale, circuite şi sisteme*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti 1984.
- Adelaida Mateescu, N. Dumitriu, L. Stanciu, *Semnale şi sisteme. Aplicații în filtrarea semnalelor*, Editura Teora, Bucureşti 2001.
- A.V. Oppenheim, A. S. Willsky, I. T. Young, *Signals and Systems,* Prentince-Hall, 1983.
- A. D. Poularikas, S. Seely, *Signals and Systems*, PWS Publishers, Boston, 1985.

Bibliografie pentru seminar:

- Adelaida Mateescu, D. Stanomir (coordonatori), *Probleme de analiza şi sinteza circuitelor*, Editura tehnică, Bucureşti, 1976.
- M. Săvescu, T. Petrescu, S. Ciochină, *Semnale, circuite şi sisteme. Probleme.* Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1981.

Bibliografie pentru laborator:

- Ioana Popescu, Victor Popescu, Erwin Szopos, Marina Dana Țopa, *Semnale, circuite şi sisteme. Îndrumător de laborator IV*, Editura Casa Cărții de Ştiință, Cluj-Napoca, 2003.

SCS I : Teoria semnalelor

Capitolul 1. **Introducere**

Capitolul 2. **O privire generală**

Capitolul 3. **Semnale periodice**

Capitolul 4. **Semnale aperiodice**

Capitolul 5. **Semnale eşantionate**

Capitolul 6. **Semnale modulate**

1. INTRODUCERE

- **SEMNAL** = o mărime fizică deterministă sau aleatoare, capabilă să transmită informație.
- **CIRCUIT** = un ansamblu de componente electrice şi electronice, interconectate prin conductoare sau prin câmp electromagnetic, care transmit şi prelucrează semnale electrice.
- **SISTEM** = un ansamblu de circuite interconectate în vederea unei funcționări unitare.

2. O PRIVIRE GENERALA

2.1 Transmisia informatiei prin semnale

2.2 Spectre si filtre

2.3 Clasificarea semnalelor

2.4 Aspecte energetice

2.1 Transmisia informatiei prin semnale

Semnale:

- **semnale utile** xu(t)
- **perturbatii** p(t)

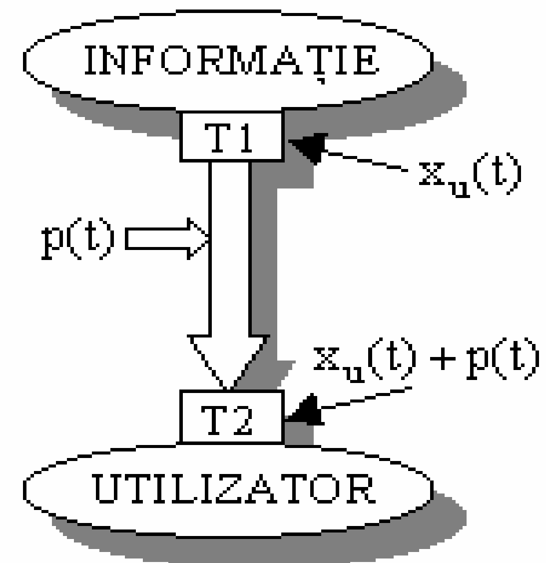


Figura 2.1. Transmisia informației prin semnale.

2.1 Transmisia informatiei prin semnale

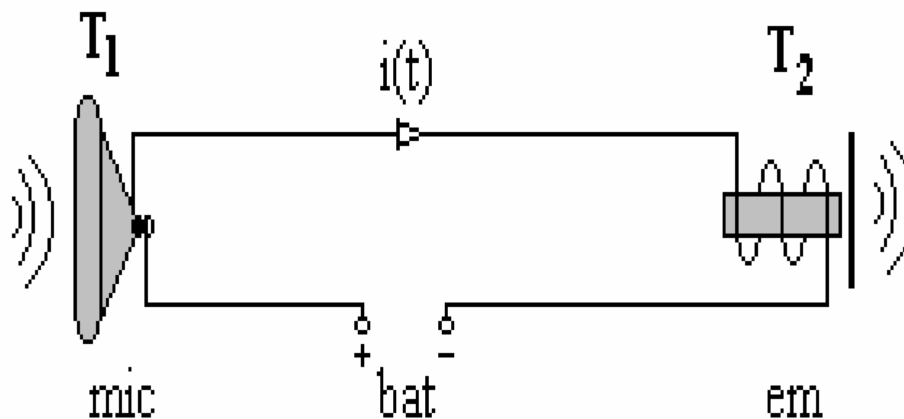


Figura 2.2. Legătură telefonică unilaterală.

2.1 Transmisia informatiei prin semnale

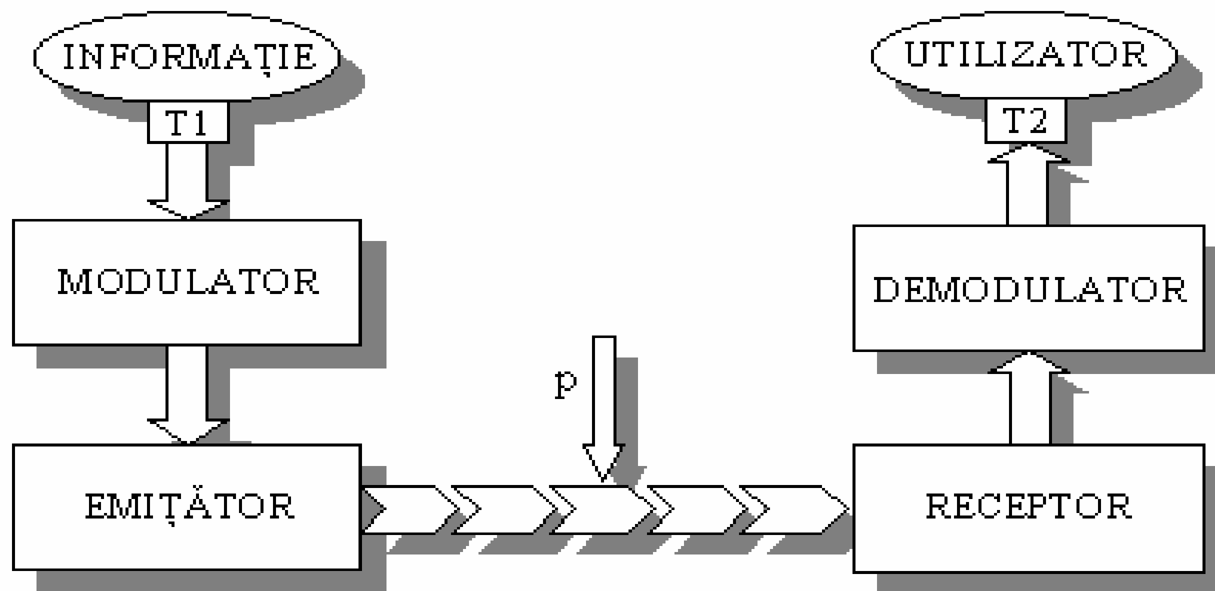


Figura 2.3. Sistem de comunicaţii radio, cu semnale modulate.

2.2 Spectre si filtre

Analiza semnalelor

- in timp;
- in frecventa - spectru;
- prin corelatie.

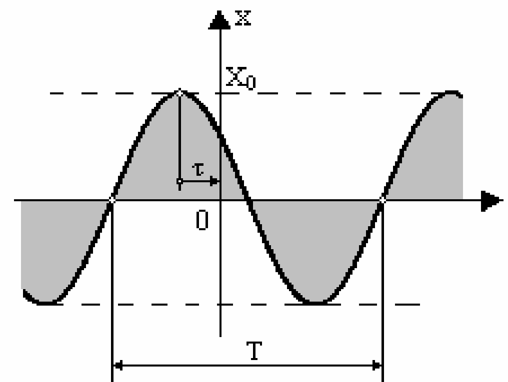


Figura 2.4. Graficul semnalului armonic

Exemplu:

$$x(t) = X_1 \cdot \cos(2\pi f_1 t + \varphi_{x1}) \quad (2.1)$$

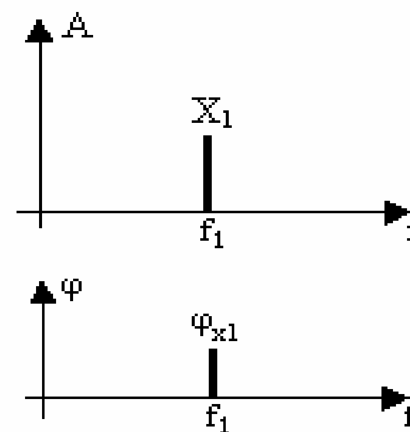


Figura 2.5. Spectrul semnalului armonic

2.2 Spectre si filtre

Spectrul unui semnal:

- Amplitudine $A > 0$
- Faza. $-\pi \leq \varphi \leq \pi$

$$x(t) = X_1 \cdot \cos(2\pi f_1 t + \varphi_{x1}) \qquad (2.1)$$

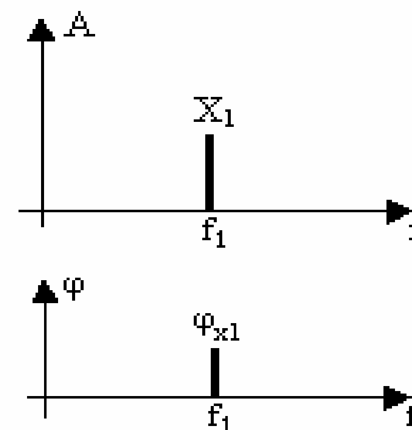
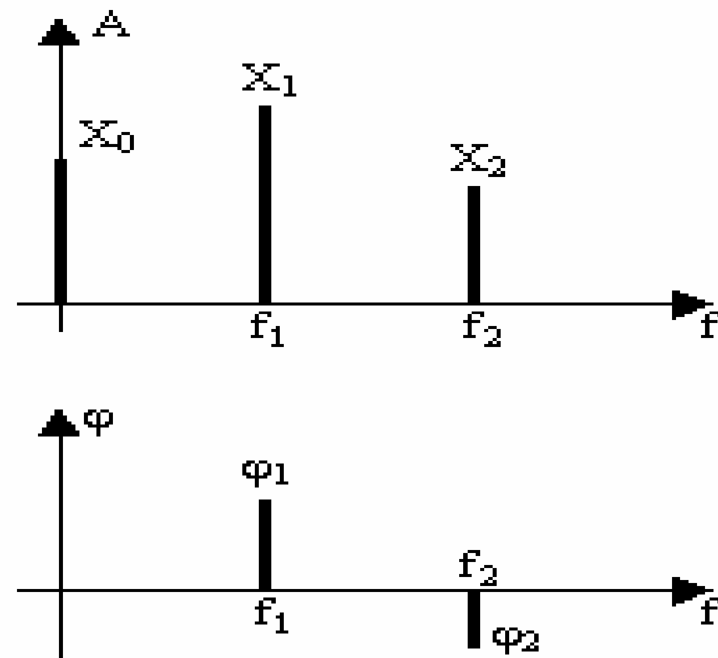


Figura 2.5. Spectrul semnalului armonic

2.2 Spectre si filtre

Exemplu:

$$x(t) = X_0 + X_1 \cos\left(2\pi f_1 t + \varphi_{x_1}\right) + X_2 \cos\left(2\pi f_2 t + \varphi_{x_2}\right) \quad \textbf{(2.4)}$$



X_0 – componenta continua

X_1, X_2 –componente armonice

$[0, f_2]$- banda de frecventa

Figura 2.6. Spectrul semnalului (2.4).

2.2 Spectre si filtre

Frecventa negativa

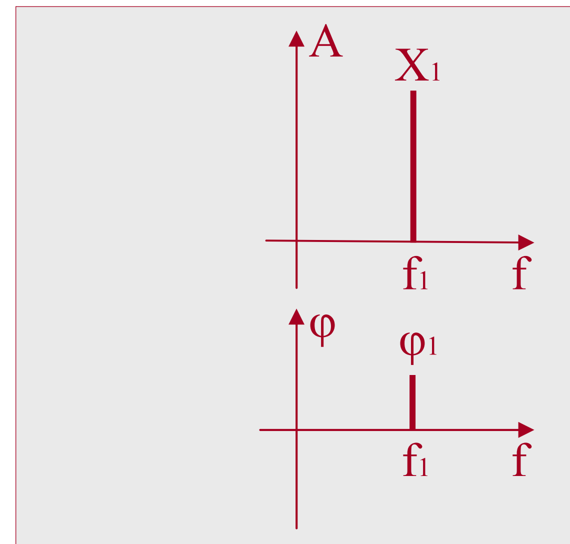
Reprezentare unilaterala a spectrului

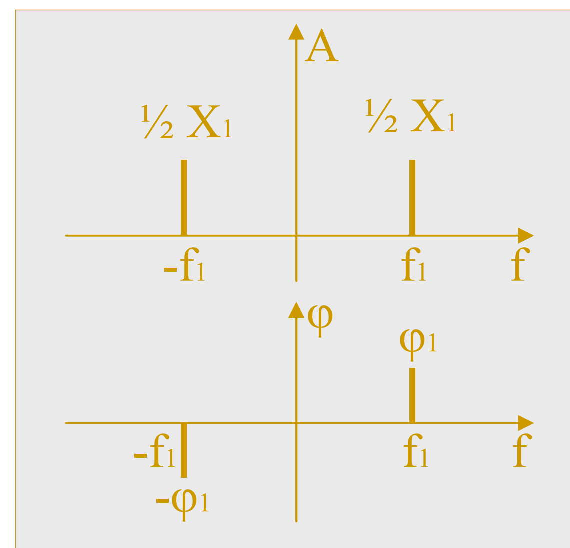
$$x(t) = X_1 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1) =$$

Relatia lui Euler

$$= \frac{1}{2} \cdot X_1 \cdot e^{j\varphi_1} \cdot e^{j2\pi f_1 t} + \frac{1}{2} \cdot X_1 \cdot e^{-j\varphi_1} \cdot e^{-j2\pi f_1 t_1}$$

Reprezentare bilaterala a spectrului





2.2 Spectre si filtre

$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot X_1 \cdot e^{j\varphi_1} \cdot e^{j2\pi f_1 t} + \frac{1}{2} \cdot X_1 \cdot e^{-j\varphi_1} \cdot e^{-j2\pi f_1 t_1}$$

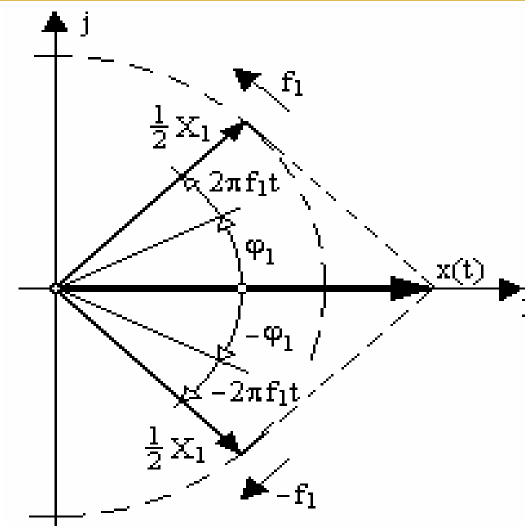
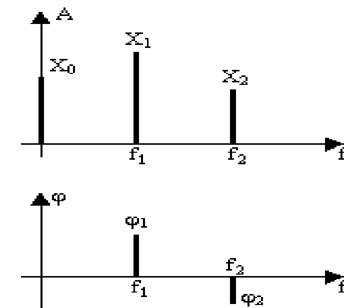


Figura 2.7. Reprezentare vectorială în planul complex a semnalului x(t)

2.2 Spectre si filtre

Reprezentare unilaterala a spectrului



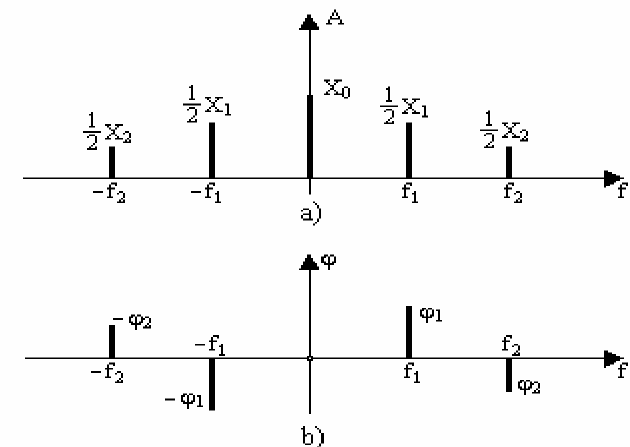
$$x(t) = X_0 + X_1 \cos\left(2\pi f_1 t + \varphi_{x_1}\right) +$$

$$+ X_2 \cos\left(2\pi f_2 t + \varphi_{x_2}\right) =$$

$$= X_0 + \frac{1}{2} X_1 e^{j\varphi_{x_1}} e^{j2\pi f_1 t} + \frac{1}{2} X_1 e^{-j\varphi_{x_1}} e^{-j2\pi f_1 t} +$$

$$+ \frac{1}{2} X_2 e^{j\varphi_{x_2}} e^{j2\pi f_2 t} + \frac{1}{2} X_2 e^{-j\varphi_{x_2}} e^{-j2\pi f_2 t}$$

Reprezentare bilaterala a spectrului



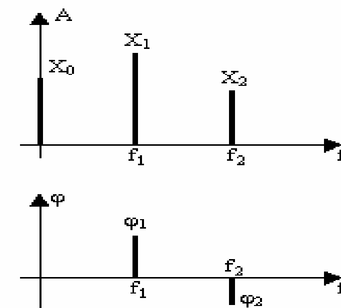
2.2 Spectre si filtre

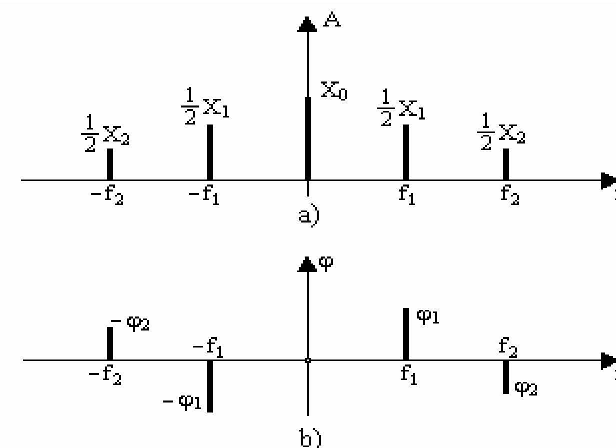
Reprezentarile spectrului

- Spectrul de amplitudini in reprezentare bilaterala prezinta o simetrie para, avand amplitudinile reduse la jumatate fata de reprezentarea unilaterala.

- Spectrul de faze in reprezentare bilaterala prezinta o simetrie impara, semiplanul drept reproducand fara modificari valorile din reprezentarea unilaterala.

- Componenta continua apare cu aceeasi valoare in ambele reprezentari.





SCS I : Teoria semnalelor

Capitolul 1. **Introducere**

Capitolul 2. ***O privire generală***

Capitolul 3. **Semnale periodice**

Capitolul 4. **Semnale aperiodice**

Capitolul 5. **Semnale eşantionate**

Capitolul 6. **Semnale modulate**

2. O PRIVIRE GENERALA

2.1 Transmisia informatiei prin semnale

2.2 Spectre si filtre

2.3 Clasificarea semnalelor

2.4 Aspecte energetice

2.2 Spectre si filtre

2.2.1 Spectrul armonic (unilateral) al semnalelor

2.2.2 Notiunea de frecventa negativa

2.2.3 Reprezentarea bilaterala a spectrului

2.2.4 Caracteristici de frecventa (filtre)

2.2.5 Raspunsul sistemelor la semnale

2.2 Spectre si filtre

2.2.4 Caracteristici de frecventa (filtre)

Liniaritatea:

Daca
$$x_1(t) \rightarrow y_1(t)$$
$$x_2(t) \rightarrow y_2(t)$$

Atunci
$$x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \rightarrow y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

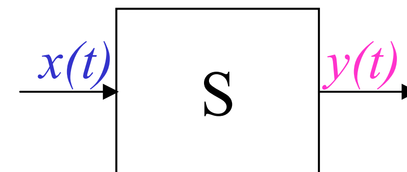


Figura 2.9. Sistem liniar cu o intrare şi o ieşire.

$$x(t) = X_1 \cdot \cos(2\pi f_1 t + \varphi_{x_1}) \rightarrow y(t) = Y_1 \cdot \cos(2\pi f_1 t + \varphi_{y_1})$$

2.2 Spectre si filtre

$$x(t)=\frac{1}{2}\cdot X_1\cdot e^{j\varphi_{x_1}}\cdot e^{j2\pi f_1 t}+\frac{1}{2}\cdot X_1\cdot e^{-j\varphi_{x_1}}\cdot e^{-j2\pi f_1 t}$$

$$y(t)=\frac{1}{2}\cdot Y_1\cdot e^{j\varphi_{y_1}}\cdot e^{j2\pi f_1 t}+\frac{1}{2}\cdot Y_1\cdot e^{-j\varphi_{y_1}}\cdot e^{-j2\pi f_1 t}$$

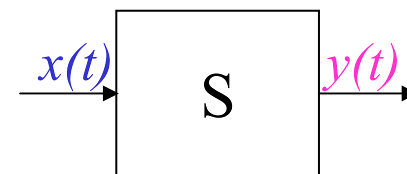


Figura 2.9. Sistem liniar cu o intrare şi o ieşire.

$$H(f_1)=\frac{Y_1}{X_1}\cdot e^{j(\varphi_{y_1}-\varphi_{x_1})}=|H(f_1)|\cdot e^{j\varphi(f_1)}$$

$$H(-f_1)=\frac{Y_1}{X_1}\cdot e^{-j(\varphi_{y_1}-\varphi_{x_1})}=|H(-f_1)|\cdot e^{j\varphi(-f_1)}$$



$$\left|H(f_1)\right|=\left|H(-f_1)\right|$$

$$\varphi(f_1)=-\varphi(-f_1)$$

2.2 Spectre si filtre

Raspunsul in frecventa

$$H(f) = \left.\frac{y(t)}{x(t)}\right|_{x(t)=e^{j2\pi ft}}$$

Răspunsul la frecvență al unui sistem real este o mărime **complexă**, funcție de frecvență, care:

- prin **modulul** sau, exprimă **amplificarea** sistemului la frecvența respectivă;
- prin **argumentul** sau, exprimă **defazajul** semnalului armonic de ieşire față de semnalul de intrare, la frecvența respectivă;
- prezintă simetria complex–conjugată.

2.2 Spectre si filtre

Caracteristici de frecvență

- Modulul raspunsului in frecventa reprezintă **caracteristica amplificării** sistemului;

$$|H(f)| = \frac{Y_1}{X_1}$$

- Argumentul raspunsului in frecventa reprezinta **caracteristica defazajului**.

$$\arg\{H(f)\} = \varphi_{y_1} - \varphi_{x_1} = \varphi(f)$$

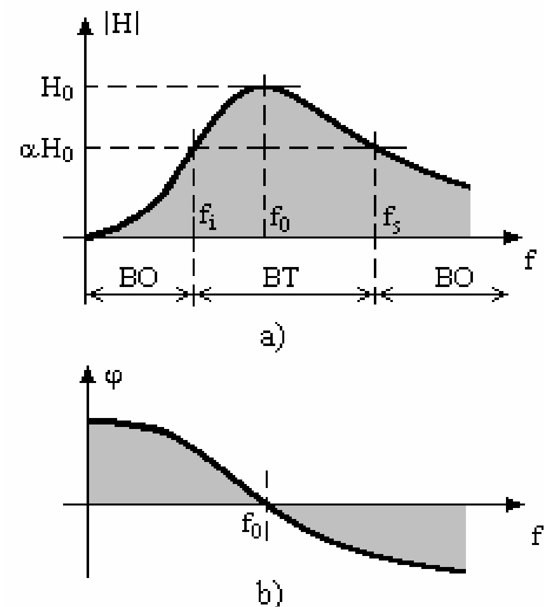


Figura 2.10. Exemplu de caracteristici de frecvență

2.2 Spectre si filtre

Filtru de frecvență = sistem selectiv in frecventa

- BT = banda de trecere
- BO = banda de oprire

Filtre elementare:

- **Trece-jos FTJ**
- **Trece-sus FTS**
- **Trece-banda FTB**
- **Opreste-banda FOB**

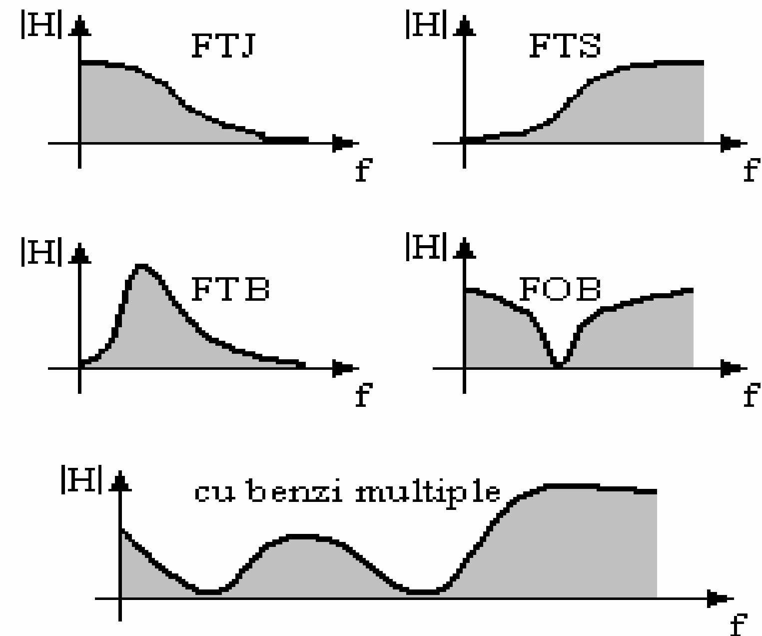


Figura 2.11. Aspecte tipice de caracteristici de frecvență.

2.3 Spectre si filtre

2.2.5 Raspunsul sistemelor la semnale

Daca $x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{N} X_k \cos\left(2\pi f_k t + \varphi_{x_k}\right)$

Atunci

$$y(t) = H(0) X_0 +$$
$$+ \sum_{k=1}^{N} \left|H(f_k)\right| \cdot X_k \cos\left(2\pi f_k t + \varphi_{x_k} + \arg\{H(f_k)\}\right)$$

2.3 Clasificarea semnalelor

2.3.1 Caracterul determinist

2.3.2 Criteriul periodicitatii

2.3.3 Criteriul continuitatii

2.3.4 Alte criterii de clasificare

2.3 Clasificarea semnalelor

2.3.1 Caracterul determinist

Semnale

- deterministe;
- aleatoare.

2.3 Clasificarea semnalelor

2.3.2 Criteriul periodicitatii

Un semnal este *periodic* daca poate fi gasit un interval *T*, astfel încât:

$$x(t) = x(t+T) \quad pentru \quad orice \quad t \in \Re$$

Cea mai mică valoare a lui *T* care verifică această relație = perioada.

Semnalul periodic poate fi descris de

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(t-kT)$$

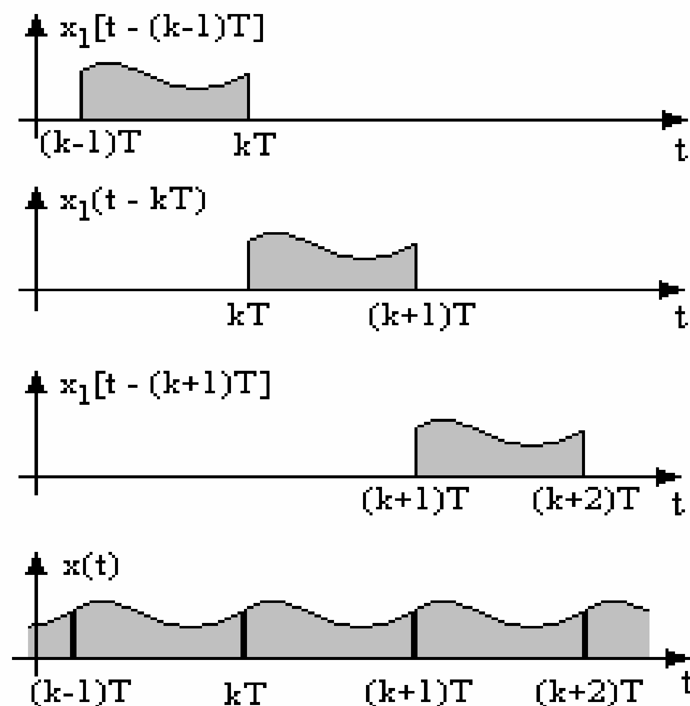


Figura 2.13. Compunerea semnalului periodic din descrierile pe o perioadă.

2.3 Clasificarea semnalelor

2.3.2 Criteriul periodicitatii

Semnale deterministe

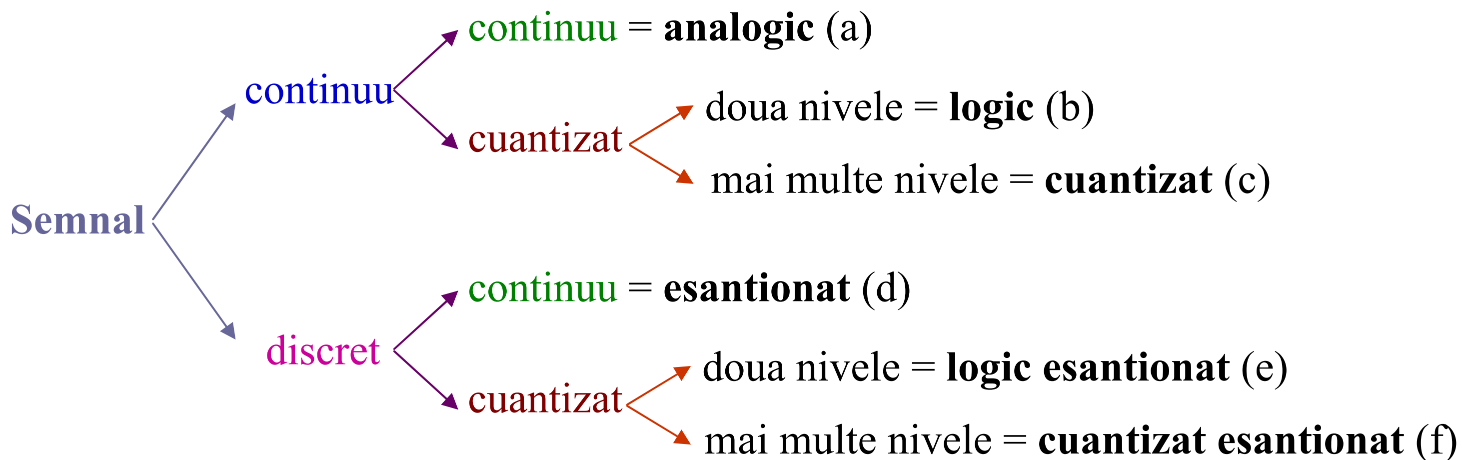
- periodice:
  - armonice; $x(t) = X_1 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_{x_1})$
  - nearmonice. $x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{N} X_n \cos(2\pi n f_1 t + \varphi_n)$
- aperiodice:
  - cvasiperiodice; $x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{N} X_n \cos(2\pi f_n t + \varphi_n)$
  - impulsuri.

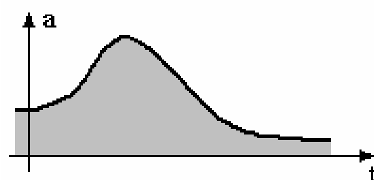
2.3 Clasificarea semnalelor

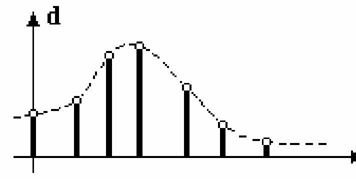
2.3.3 Criteriul continuitatii

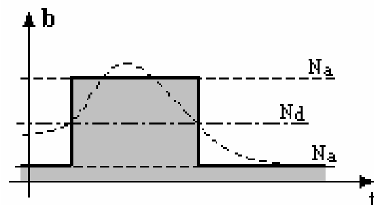
⇒ în domeniul timp:
- continuu;
- discret.

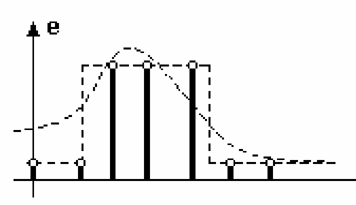
⇒ în domeniul valorilor
- continuu;
- cuantizat.

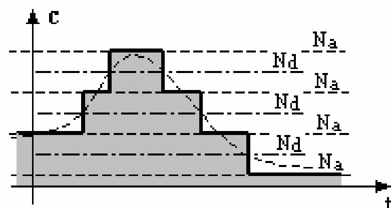

Semnal
continuu
continuu = **analogic** (a)
cuantizat
doua nivele = **logic** (b)
mai multe nivele = **cuantizat** (c)
discret
continuu = **esantionat** (d)
cuantizat
doua nivele = **logic esantionat** (e)
mai multe nivele = **cuantizat esantionat** (f)

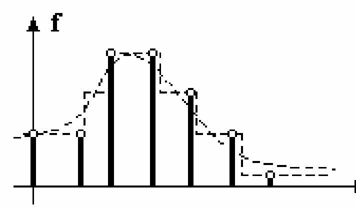

a
t


d
t


b
Na
Nd
Na
t


e
t


c
Na
Nd
Na
Nd
Na
Nd
Na
t


f
t

2.3 Clasificarea semnalelor

2.3.4 Alte criterii de clasificare

Semnale

- de banda larga – B ~ f0
- de banda ingusta – B << f0

Semnale

- de frecventa joasa
- de frecventa medie
- de frecventa inalta

2.4 Aspecte energetice

2.4.1 Energia (puterea) de semnal

2.4.2 Puterea semnalelor armonice

2.4.3 Calculul puterii si a energiei in domeniul timp

2.4 Aspecte energetice

2.4.1 Energia (puterea) de semnal = energia (puterea) pe care semnalul electric ar dezvolta-o într-o rezistență unitară.

⇒ *pt. semnale periodice* - energia totala este infinita; puterea medie este finita → semnale de putere

⇒ *pt. semnale aperiodice* - energia totala este finita; puterea medie este nula → **semnale de energie**

2.4 Aspecte energetice

2.4.2 Puterea semnalelor armonice

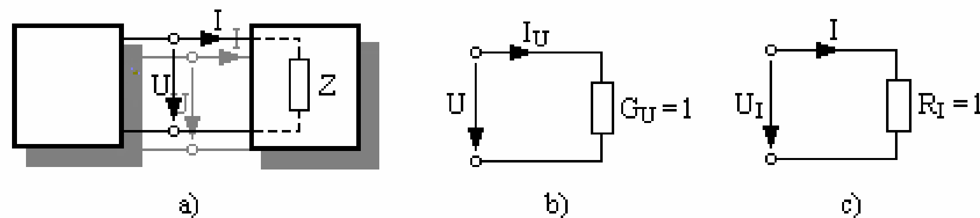


Fig.2.16. Secțiune printr-un lanț de transmisie.

$$\underline{U} = \underline{Z}\ \underline{I}\ ,\ unde : \underline{Z} = R_z + jX_z$$

$$P_Z = \frac{1}{2} R_Z \cdot |\underline{I}|^2 = \frac{1}{2} R_Z \cdot I^2 = \frac{1}{2} G_Z \cdot |\underline{U}|^2 = \frac{1}{2} G_Z \cdot U^2$$

$$P_U = \frac{1}{2} G_U \cdot U^2 = \frac{1}{2}\ U^2; \qquad P_I = \frac{1}{2} R_I \cdot I^2 = \frac{1}{2}\ I^2.$$

2.4 Aspecte energetice

Puterea de semnal a unui semnal armonic, de amplitudine *X*, se exprimă prin relația:

$$P = \frac{1}{2} X^2 \qquad (2.27)$$

Pentru componenta continuă, puterea se calculează similar, dar fără factorul 1/2 :

$$P_0 = X_0^{\,2} \qquad (2.28)$$

2.4 Aspecte energetice

2.4.3 Calculul puterii si a energiei in domeniul timp

Energia totala de semnal in intervalul (t1, t2)

$$W_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\ dt$$

$\Rightarrow$ *pt. semnale periodice*

$$W_T = \int_T x^2(t)\ dt, \quad P = \frac{1}{T}\int_T x^2(t)\ dt.$$

$\Rightarrow$ *pt. semnale aperiodice*

$$W_{tot} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\ dt.$$

SCS I : Teoria semnalelor

Capitolul 1. **Introducere**
Capitolul 2. ***O privire generală***
Capitolul 3. **Semnale periodice**
Capitolul 4. **Semnale aperiodice**
Capitolul 5. **Semnale eşantionate**
Capitolul 6. **Semnale modulate**

2. O PRIVIRE GENERALA

2.1 Transmisia informatiei prin semnale

2.2 Spectre si filtre

2.3 Clasificarea semnalelor

2.4 Aspecte energetice

2.3 Clasificarea semnalelor

2.3.1 Caracterul determinist

2.3.2 Criteriul periodicitatii

2.3.3 Criteriul continuitatii

2.3.4 Alte criterii de clasificare

2.3 Clasificarea semnalelor

2.3.2 Criteriul periodicitatii

Semnale deterministe

- periodice:
  - armonice; $x(t) = X_1 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_{x_1})$
  - nearmonice. $x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{N} X_n \cos(2\pi n f_1 t + \varphi_n)$
- aperiodice:
  - cvasiperiodice; $x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{N} X_n \cos(2\pi f_n t + \varphi_n)$
  - impulsuri.

2.3 Clasificarea semnalelor

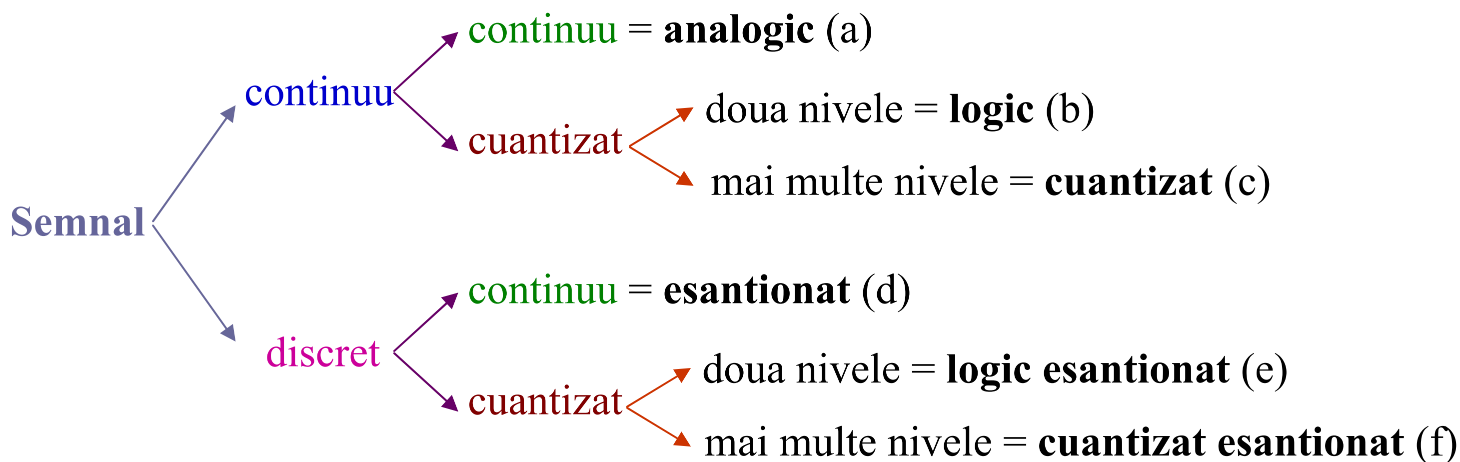
2.3.3 Criteriul continuitatii

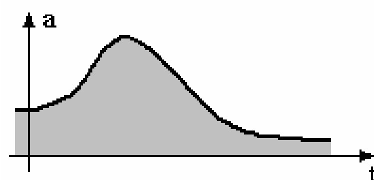
⇒ în domeniul timp:

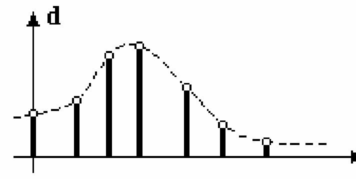
- continuu;
- discret.

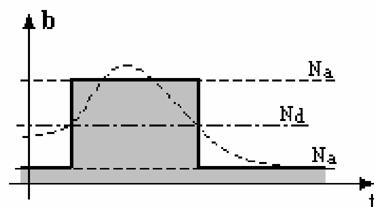
⇒ în domeniul valorilor

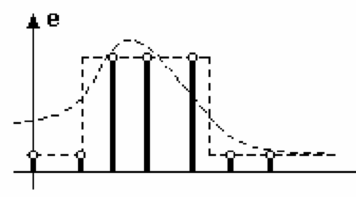
- continuu;
- cuantizat.

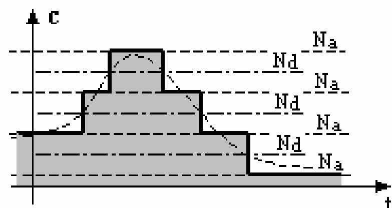

Semnal
continuu
continuu = **analogic** (a)
cuantizat
doua nivele = **logic** (b)
mai multe nivele = **cuantizat** (c)
discret
continuu = **esantionat** (d)
cuantizat
doua nivele = **logic esantionat** (e)
mai multe nivele = **cuantizat esantionat** (f)

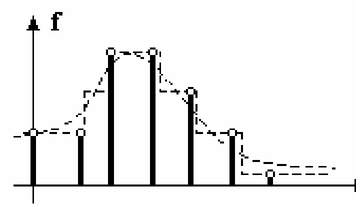

a
t


d
t


b
Na
Nd
Na
t


e
t


c
Na
Nd
Na
Nd
Na
Nd
Na
t


f
t

2.3 Clasificarea semnalelor

2.3.4 Alte criterii de clasificare

Semnale

- de banda larga – B ~ f0
- de banda ingusta – B << f0

Semnale

- de frecventa joasa
- de frecventa medie
- de frecventa inalta

2.4 Aspecte energetice

2.4.1 Energia (puterea) de semnal

2.4.2 Puterea semnalelor armonice

2.4.3 Calculul puterii si a energiei in domeniul timp

2.4 Aspecte energetice

2.4.1 Energia (puterea) de semnal = energia (puterea) pe care semnalul electric ar dezvolta-o într-o rezistență unitară.

⇒ *pt. semnale periodice* - energia totala este infinita; puterea medie este finita → semnale de putere

⇒ *pt. semnale aperiodice* - energia totala este finita; puterea medie este nula → **semnale de energie**

2.4 Aspecte energetice

2.4.2 Puterea semnalelor armonice

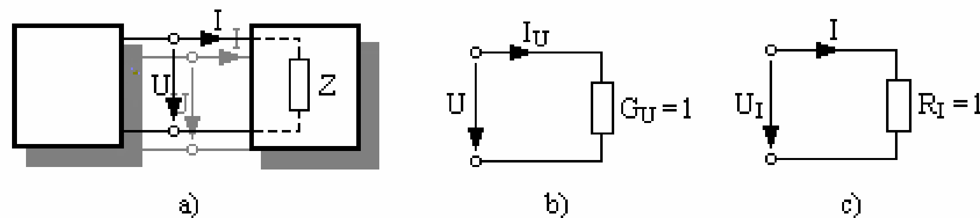


Fig.2.16. Secțiune printr-un lanț de transmisie.

$$\underline{U} = \underline{Z}\ \underline{I}\ ,\ unde : \underline{Z} = R_z + jX_z$$

$$P_Z = \frac{1}{2} R_Z \cdot |\underline{I}|^2 = \frac{1}{2} R_Z \cdot I^2 = \frac{1}{2} G_Z \cdot |\underline{U}|^2 = \frac{1}{2} G_Z \cdot U^2$$

$$P_U = \frac{1}{2} G_U \cdot U^2 = \frac{1}{2}\ U^2; \qquad P_I = \frac{1}{2} R_I \cdot I^2 = \frac{1}{2}\ I^2.$$

2.4 Aspecte energetice

Puterea de semnal a unui semnal armonic, de amplitudine *X*, se exprimă prin relația:

$$P = \frac{1}{2} X^2 \tag{2.27}$$

Pentru componenta continuă, puterea se calculează similar, dar fără factorul 1/2 :

$$P_0 = X_0^{\ 2} \tag{2.28}$$

2.4 Aspecte energetice

2.4.3 Calculul puterii si a energiei in domeniul timp

Energia totala de semnal in intervalul (t1, t2)

$$W_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\ dt$$

$\Rightarrow$ *pt. semnale periodice*

$$W_T = \int_T x^2(t)\ dt, \quad P = \frac{1}{T}\int_T x^2(t)\ dt.$$

$\Rightarrow$ *pt. semnale aperiodice*

$$W_{tot} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\ dt.$$

3. SEMNALE PERIODICE

3.1 Seturi de funcții ortogonale

3.2 Analiza armonică a semnalelor periodice

3.3 Metoda delta – periodic

3.12 Seturi de funcții ortogonale

Dezvoltare de tip *Fourier:*

$$x(t) = \sum_k a_k g_k(t)$$

- **seria să fie convergentă;**
- **coeficienții a_k să fie relativ uşor de determinat şi independenți unul de celălalt;**
- **funcțiile elementare să fie simplu de manevrat şi adecvate scopului analizei.**

$\Rightarrow$ utilizarea de seturi de functii ortogonale

3.1 Seturi de funcții ortogonale

Un set de funcții $\{g_k(t)\}$ este ortogonal dacă:

$$\int_T g_i(t)\cdot g_j^*(t)\ dt = \begin{cases} N^2, & pentru\ \ i=j \\ 0, & pentru\ \ i\neq j \end{cases} \tag{3.2}$$

unde:

- ***T* este domeniul de ortogonalitate;**
- *** = complex–conjugat;**
- ***N* reprezintă norma setului de funcții. ; dacă *N* = 1, setul este orto-normat.**

Un *set complet* de funcții elementare pentru o clasă de semnale este un set cu care se poate analiza orice semnal din acea clasă.

3.1 Seturi de funcții ortogonale

Daca se considera o dezvoltare de tip *Fourier:*

$$x(t) = \sum_{k} a_k g_k(t),$$

atunci coeficientii *Fourier* se calculeaza cu:

$$a_n = \frac{1}{N^2} \int_T x(t) \cdot g_n^*(t) \; dt.$$

3.1 Seturi de funcții ortogonale

Se considera dezvoltarile de tip *Fourier:*

$$x(t) = \sum_k a_k g_k(t), \quad unde \quad a_n = \frac{1}{N^2} \int_T x(t) \cdot g_n^*(t) \; dt$$

$$x(t) = \sum_k b_k g_k(t).$$

Presupunem $b_k \neq a_k$ **.**

3.1 Seturi de funcții ortogonale

Eroarea medie patratica:

$$\varepsilon^2 = \tfrac{1}{T}\int_T [x(t) - \sum_k b_k g_k(t)]^2 \;\; dt =$$

$$= \tfrac{1}{T}\int_T x^2(t) \;\; dt - \tfrac{2}{T}\sum_k \; b_k \int_T x(t) \;\; g_k(t) \;\; dt + \tfrac{1}{T}\int_T \; [\sum_k b_k g_k(t)]^2 dt =$$

$$\varepsilon^2 = \tfrac{1}{T}\cdot\int_T x^2(t) \;\; dt \;\; - \;\; \tfrac{2N^2}{T}\cdot\sum_k a_k b_k \;\; + \;\; \tfrac{N^2}{T}\cdot\sum_k b_k^2 \;\; \pm \;\; \tfrac{N^2}{T}\cdot\sum_k a_k^2 =$$

$$= \tfrac{1}{T}\cdot\int_T x^2(t) \;\; dt \;\; - \;\; \tfrac{N^2}{T}\cdot\sum_k a_k^2 \;\; + \;\; \tfrac{N^2}{T}\cdot\sum_k (a_k - b_k)^2$$



3.1 Seturi de funcții ortogonale

Egalitatea lui Parseval:

$$\frac{N^2}{T}\cdot\sum_{k} a_k^2 = \frac{1}{T}\cdot\int_{T} x^2(t)\ dt$$

→ **Un set de funcții ortogonale este *complet* în raport cu o clasă de semnale, dacă egalitatea lui Parseval se verifică. ⇔ Suma puterilor componentelor este egală cu puterea semnalului analizat.**

3.2 Analiza armonică a semnalelor periodice

3.2.1 Seria *Fourier* armonica

3.2.2 Spectrul *Fourier* armonic

3.2.3 Proprietățile SFA

3.2 Analiza armonică a semnalelor periodice

3.2.1 Seria *Fourier* armonica

Set de functii: $\frac{1}{2}$; $\cos(2\pi n f_1 t)$; $\sin(2\pi n f_1 t)$; $pentru: n = \overline{1,\infty}$.

Forma trigonometrica SFA:

$$x(t) = \frac{1}{2} C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(2\pi n f_1 t) + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \sin(2\pi n f_1 t)$$

$$unde\ C_0 = \tfrac{2}{T} \cdot \int_T x(t)\ dt\ ;\ C_n = \tfrac{2}{T} \cdot \int_T x(t)\ \cos\ (2\pi n f_1 t)\ dt;\ S_n = \tfrac{2}{T} \cdot \int_T x(t)\ \sin\ (2\pi n f_1 t)\ dt$$

Forma armonica a SFA:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\ (2\pi n f_1 t + \varphi_n)$$

$$unde\ A_0 = \frac{C_0}{2}\ ;\ A_n = \sqrt{C_n^2 + S_n^2}\ ;\ \varphi_n = -\ arctg\ \frac{S_n}{C_n}$$

Forma complexa a SFA:

$$x(t) = A_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{nc} e^{j 2\pi n f_1 t}$$

$$unde\ A_{nc} = \tfrac{2}{T} \int_T x(t)\ e^{-j 2\pi n f_1 t} dt,\ A_{nc} = C_n - j \cdot S_n,\ |A_{nc}| = A_n\ ;\ \arg\ \{A_{nc}\} = \varphi_n .$$

SCS I : Teoria semnalelor

Capitolul 1. **Introducere**

Capitolul 2. **O privire generală**

Capitolul 3. ***Semnale periodice***

Capitolul 4. **Semnale aperiodice**

Capitolul 5. **Semnale eşantionate**

Capitolul 6. **Semnale modulate**

3. SEMNALE PERIODICE

3.1 Seturi de funcții ortogonale

3.2 Analiza armonică a semnalelor periodice

3.3 Metoda delta – periodic

3.12 Seturi de funcții ortogonale

Dezvoltare de tip *Fourier:*

$$x(t) = \sum_k a_k g_k(t)$$

- seria să fie convergentă;
- coeficienții a_k să fie relativ uşor de determinat şi independenți unul de celălalt;
- funcțiile elementare să fie simplu de manevrat şi adecvate scopului analizei.

$\Rightarrow$ **utilizarea de seturi de functii ortogonale**

3.1 Seturi de funcții ortogonale

Un set de funcții $\{g_k(t)\}$ este ortogonal dacă:

$$\int_T g_i(t)\cdot g_j^*(t)\ dt = \begin{cases} N^2\ ,\ pentru\ \ i=j \\ 0\ ,\ pentru\ \ i\neq j \end{cases} \qquad (3.2)$$

unde:

- ***T* este domeniul de ortogonalitate;**
- *** = complex–conjugat;**
- ***N* reprezintă norma setului de funcții. ; dacă *N* = 1, setul este orto-normat.**

Un *set complet* de funcții elementare pentru o clasă de semnale este un set cu care se poate analiza orice semnal din acea clasă.

3.1 Seturi de funcții ortogonale

Daca se considera o dezvoltare de tip *Fourier:*

$$x(t) = \sum_k a_k g_k(t),$$

atunci coeficientii *Fourier* se calculeaza cu:

$$a_n = \frac{1}{N^2} \int_T x(t) \cdot g_n^*(t) \ dt.$$

3.1 Seturi de funcții ortogonale

Se considera dezvoltarile de tip *Fourier:*

$$x(t) = \sum_k a_k g_k(t), \quad unde \quad a_n = \tfrac{1}{N^2} \int_T x(t) \cdot g_n^*(t) \; dt$$

$$x(t) = \sum_k b_k g_k(t).$$

Presupunem $b_k \neq a_k$.

3.1 Seturi de funcții ortogonale

Eroarea medie patratica:

$$\varepsilon^2 = \tfrac{1}{T}\int_T [x(t) - \sum_k b_k g_k(t)]^2 \; dt =$$

$$= \tfrac{1}{T}\int_T x^2(t)\; dt - \tfrac{2}{T}\sum_k b_k \int_T x(t)\; g_k(t)\; dt + \tfrac{1}{T}\int_T [\sum_k b_k g_k(t)]^2 dt =$$

$$\varepsilon^2 = \tfrac{1}{T}\cdot\int_T x^2(t)\; dt \;-\; \tfrac{2N^2}{T}\cdot\sum_k a_k b_k \;+\; \tfrac{N^2}{T}\cdot\sum_k b_k^2 \;\pm\; \tfrac{N^2}{T}\cdot\sum_k a_k^2 =$$

$$= \tfrac{1}{T}\cdot\int_T x^2(t)\; dt \;-\; \tfrac{N^2}{T}\cdot\sum_k a_k^2 \;+\; \tfrac{N^2}{T}\cdot\sum_k (a_k - b_k)^2$$



3.1 Seturi de funcții ortogonale

Egalitatea lui Parseval:

$$\frac{N^2}{T} \cdot \sum_{k} a_k^2 = \frac{1}{T} \cdot \int_{T} x^2(t) \ dt$$

→ **Un set de funcții ortogonale este *complet* în raport cu o clasă de semnale, dacă egalitatea lui Parseval se verifică. ⇔ Suma puterilor componentelor este egală cu puterea semnalului analizat.**

3.2 Analiza armonică a semnalelor periodice

3.2.1 Seria *Fourier* armonica

3.2.2 Spectrul *Fourier* armonic

3.2.3 Proprietățile SFA

3.2 Analiza armonică a semnalelor periodice

3.2.1 Seria *Fourier* armonica

Set de functii: $\frac{1}{2}\ ;\ \cos(2\pi n f_1 t)\ ;\ \sin(2\pi n f_1 t)\ ;\ pentru: n=\overline{1,\infty}$.

Forma trigonometrica SFA:

$$x(t)=\frac{1}{2}C_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos(2\pi n f_1 t)+\sum_{n=1}^{\infty}S_n\sin(2\pi n f_1 t)$$

$$unde\ C_0=\tfrac{2}{T}\cdot\int_T x(t)\ dt\ ;\ C_n=\tfrac{2}{T}\cdot\int_T x(t)\ \cos\ (2\pi n f_1 t)\ dt;\ S_n=\tfrac{2}{T}\cdot\int_T x(t)\ \sin\ (2\pi n f_1 t)\ dt$$

Forma armonica a SFA:

$$x(t)=A_0\ +\ \sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\ (2\pi n f_1 t+\varphi_n)$$

$$unde\ A_0=\frac{C_0}{2}\ ;\ A_n=\sqrt{C_n^{\ 2}+S_n^{\ 2}}\ ;\ \varphi_n=-\ arctg\frac{S_n}{C_n}$$

Forma complexa a SFA:

$$x(t)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_{nc}e^{j2\pi n f_1 t}=A_0\ +\ \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}A_{nc}e^{j2\pi n f_1 t}$$

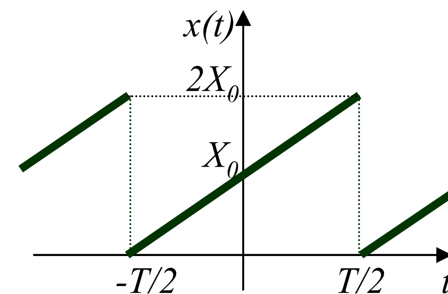
Set de functii: $e^{j2\pi n f_1 t}$

$$unde\ A_{0c}=\frac{2}{T}\int_T x(t)dt=\frac{1}{2}A_0;\ n\neq 0,\ A_{nc}=\frac{2}{T}\int_T x(t)\ e^{-j2\pi n f_1 t}dt;$$

$$A_{nc}=C_n-j\cdot S_n,\ |A_{nc}|=A_n\ ;\ \arg\ \{A_{nc}\}=\varphi_n.$$

3.2 Analiza armonică a semnalelor periodice

Exemplu $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(t-kT)\ unde\ x_1(t)=\begin{cases} X_0+\frac{2X_0}{T}t,\ t\in\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right] \\ 0\ in\ rest \end{cases}$



Forma trigonometrica:

$$C_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left(X_0+\frac{2X_0}{T}\right)dt=\frac{2}{T}X_0T=2X_0;\ C_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left(X_0+\frac{2X_0}{T}\right)\cos(2\pi nf_1t)dt;$$

$$S_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left(X_0+\frac{2X_0}{T}\right)\sin(2\pi nf_1t)dt=\frac{2}{T}\left[-\left(X_0+\frac{2X_0}{T}\right)\frac{\cos(2\pi nf_1t)}{2\pi nf_1}\Bigg|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\right]+\frac{2X_0}{T}\frac{1}{2\pi nf_1}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\cos(2\pi nf_1t)dt=\frac{2X_0}{\pi n}(-1)^{n+1}$$

$$x(t)=\frac{1}{2}2X_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2X_0}{\pi n}(-1)^{n+1}\sin(2\pi nf_1t)$$

Forma armonica:

$$A_0=\frac{C_0}{2}=X_0\ ;A_n=\sqrt{C_n^2+S_n^2}=\frac{2X_0}{\pi n};\ \varphi_n=-\ arctg\ \frac{S_n}{C_n}=\begin{cases}\frac{\pi}{2},\ n=2k+1\\ -\frac{\pi}{2},\ n=2k\end{cases}$$

$$x(t)=X_0\ +\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2X_0}{\pi n}\cos\ (2\pi nf_1t+\varphi_n)$$

3.2 Analiza armonică a semnalelor periodice

x(t)

Forma complexa:

$$A_{0c} = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left(X_0 + \frac{2X_0}{T}t\right)dt = 2X_0 = 2A_0$$

$$A_{nc} = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left(X_0 + \frac{2X_0}{T}t\right)e^{-j2\pi n f_1 t}dt = \frac{2}{T}\left[\left(X_0 + \frac{2X_0}{T}t\right)\frac{e^{-j2\pi n f_1 t}}{-j2\pi n f_1}\Bigg|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} - \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\frac{e^{-j2\pi n f_1 t}}{-j2\pi n f_1}\frac{2X_0}{T}dt\right] = j\frac{2(-1)^n}{\pi n}$$

$$x(t) = A_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} j\frac{2(-1)^n}{\pi n}e^{j2\pi n f_1 t}$$

3.2 Analiza armonică a semnalelor periodice

3.2.2 Spectrul *Fourier* armonic

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\ (2\pi n f_1 t + \varphi_n) \qquad x(t) = A_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{nc} e^{j2\pi n f_1 t}$$

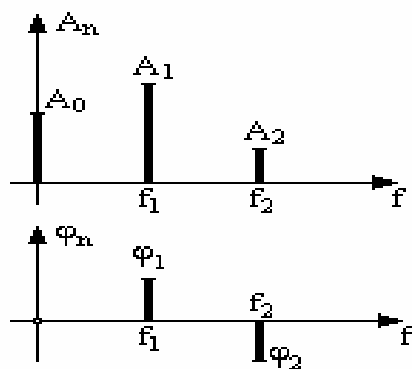


Fig.3.2. Exemplu de spectru în reprezentare unilaterală.

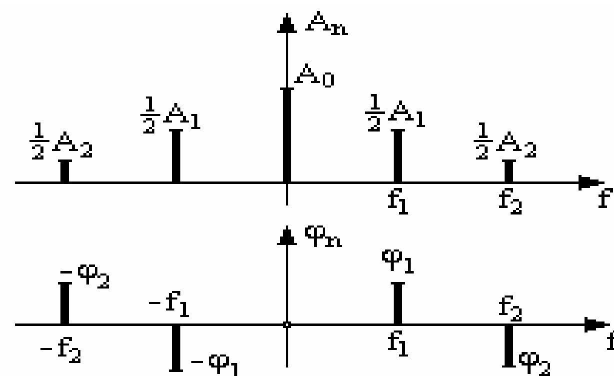
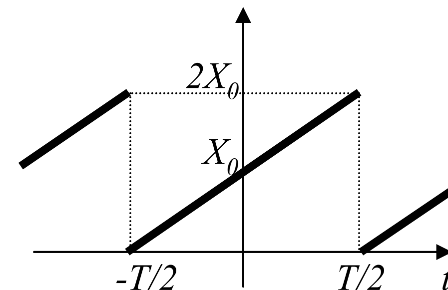


Figura 3.3. Spectrul din figura 3.2 în reprezentare bilaterală.

3.2 Analiza armonică a semnalelor periodice

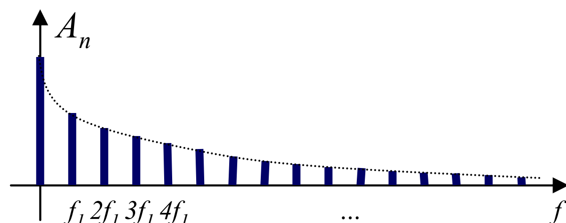
Exemplu $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(t-kT)\ unde\ x_1(t)=\begin{cases} X_0+\frac{2X_0}{T}t,\ t\in\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right] \\ 0\ in\ rest\end{cases}$

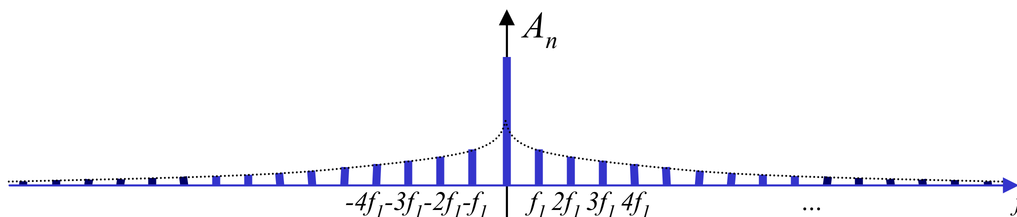


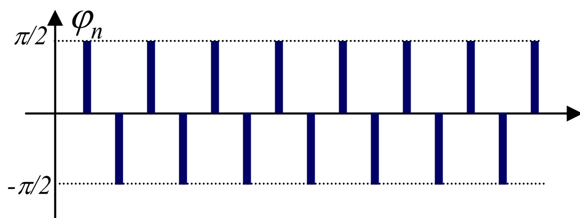
$$x(t)=X_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2X_0}{\pi n}\cos(2\pi n f_1 t+\varphi_n)$$

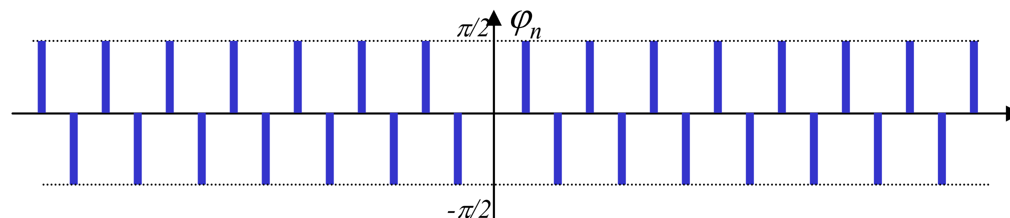
$$x(t)=A_0+\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty} j\frac{2(-1)^n}{\pi n}e^{j2\pi n f_1 t}$$

$f_1 f_1$









3.2 Analiza armonică a semnalelor periodice

3.2.3 Proprietățile SFA

Notatie: $x(t) \Leftrightarrow A_{ncx}$

a. **Teorema liniarității.**

$$x(t) = \alpha \; x_1(t) + \beta \; x_2(t) \Leftrightarrow A_{nc} = \alpha \; A_{nc1} + \beta \; A_{nc2}$$

b. **Teorema întârzierii.**

$$x_1(t) = x(t-\tau) \Leftrightarrow A_{nc1} = A_{nc} e^{-j2\pi n f_1 \tau}$$

c. **Teorema modulării.**

$$Daca \; x_1(t) = x(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t},$$

$$atunci \; x_1(t) = \left[\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{nc} \cdot e^{j2\pi n f_1 t} \right] \cdot e^{j2\pi f_0 t} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{nc} \cdot e^{j2\pi (f_0 + n f_1)\, t}$$

3.2 Analiza armonică a semnalelor periodice

3.2.3 Proprietățile SFA

d. Teorema derivării.

$$x_1(t) = x^{(k)}(t) \Leftrightarrow A_{nc1} = (j2\pi n f_1)^k \cdot A_{nc}$$

e. Teorema integrării.

$$x_1(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) \ d\tau \Leftrightarrow A_{nc1} = \frac{A_{nc}}{j2\pi n f_1}$$

SCS I : Teoria semnalelor

Capitolul 1. **Introducere**

Capitolul 2. **O privire generală**

Capitolul 3. ***Semnale periodice***

Capitolul 4. **Semnale aperiodice**

Capitolul 5. **Semnale eşantionate**

Capitolul 6. **Semnale modulate**

3. SEMNALE PERIODICE

3.1 Seturi de funcții ortogonale

3.2 Analiza armonică a semnalelor periodice

3.3 Metoda delta – periodic

3.4 Distributia spectrala a puterii

3.5 Analiza aproximativa a semnalelor periodice

3.2 Analiza armonică a semnalelor periodice

3.2.1 Seria *Fourier* armonica

3.2.2 Spectrul *Fourier* armonic

3.2.3 Proprietățile SFA

3.2 Analiza armonică a semnalelor periodice

3.2.1 Seria *Fourier* armonica

Forma complexa a SFA:

$$x(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{nc} e^{j2\pi n f_1 t} = A_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} A_{nc} e^{j2\pi n f_1 t}$$

$$unde\ A_{0c} = \frac{2}{T}\int_T x(t)dt = \frac{1}{2}A_0;\ n \neq 0,\ A_{nc} = \frac{2}{T}\int_T x(t)\ e^{-j2\pi n f_1 t} dt;$$

Forma armonica a SFA:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\ (2\pi n f_1 t + \varphi_n)$$

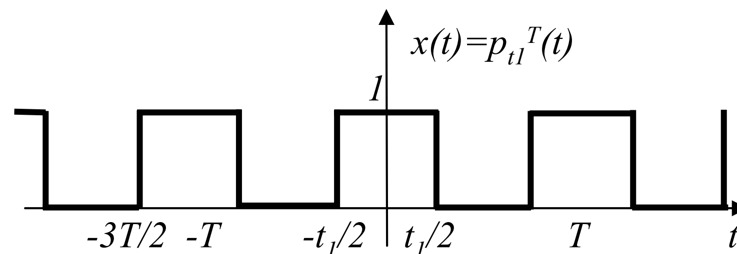
$$unde\ A_0 = \frac{A_{0c}}{2}\ ;\ A_n = \left|A_{nc}\right|\ ;\ \varphi_n = \arg\left\{A_{nc}\right\}$$

3.2 Analiza armonică a semnalelor periodice

Exemplu: tren de impulsuri dreptunghiulare

$$x(t) = p_{t_1}^{T}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(t-kT)$$

$$unde\ x_1(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{t_1}{2} \\ 0, & \frac{t_1}{2} < |t| < \frac{T}{2} \end{cases}$$



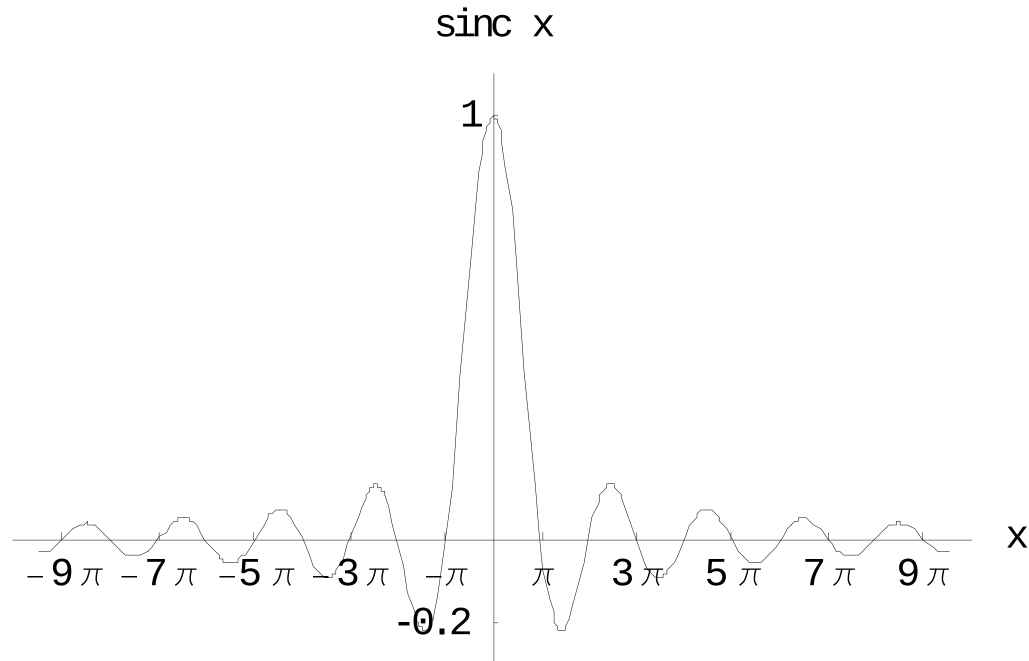
$$A_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} dt = \frac{t_1}{T};$$

$$n \neq 0,\ A_{nc} = \frac{2}{T}\int_{-\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} e^{-j2\pi n f_1 t} dt = \frac{2}{T}\left.\frac{e^{-j2\pi n f_1 t}}{-j2\pi n f_1}\right|_{-\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} = \frac{2t_1}{T}\,\text{sinc}\left(\pi n \frac{t_1}{T}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_n = |A_{nc}| = \frac{2t_1}{T}\left|\text{sinc}\left(\pi n \frac{t_1}{T}\right)\right| \\ \varphi_n = \arg\{A_{nc}\} = 0\ or\ \pi \end{cases}$$

3.2 Analiza armonică a semnalelor periodice

$$\sin c(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

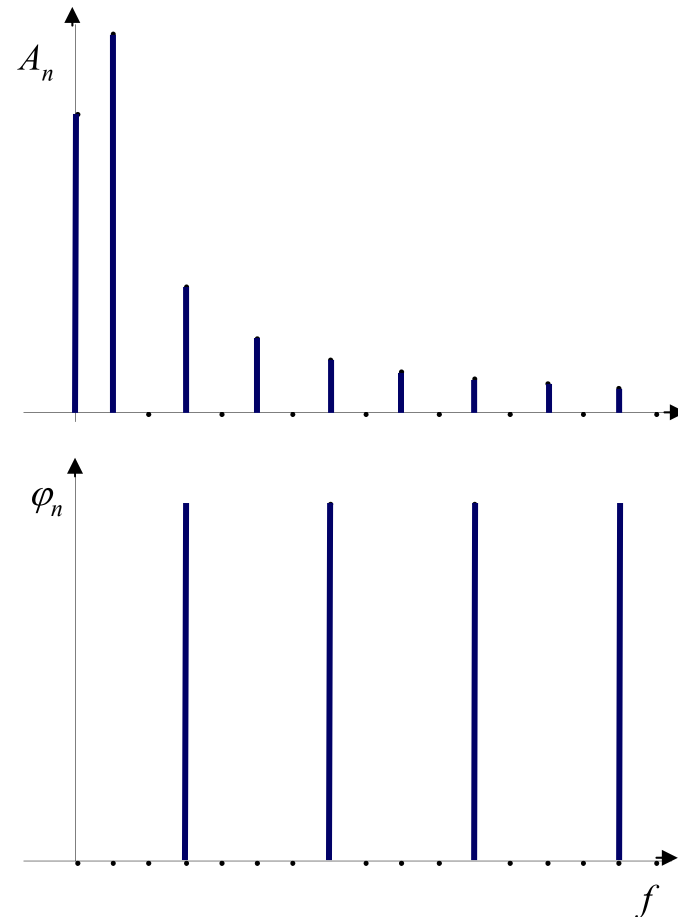


3.2 Analiza armonică a semnalelor periodice

t_1=T/2:

$$A_0 = \frac{1}{2}; n \neq 0,\ A_{nc} = \mathrm{sinc}\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
A_{nc}	1	$\frac{2}{\pi}$	0	$-\frac{2}{3\pi}$	0	$\frac{2}{5\pi}$	0	$-\frac{2}{7\pi}$	0
A_n	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{\pi}$	0	$\frac{2}{3\pi}$	0	$\frac{2}{5\pi}$	0	$\frac{2}{7\pi}$	0
φ_n		0	0	π	0	0	0	π	0



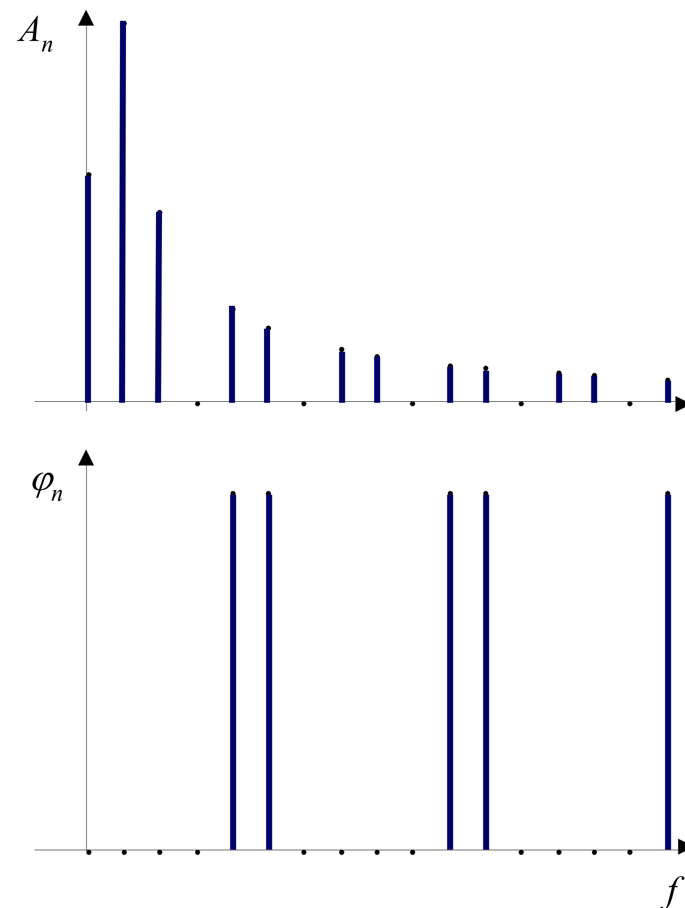
3.2 Analiza armonică a semnalelor periodice

t_1=T/3:

$$A_0 = \frac{1}{3};\ n \neq 0,\ A_{nc} = \frac{2}{3}\mathrm{sinc}\left(n\frac{\pi}{3}\right)$$

$\Rightarrow$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
A_{nc}	$\frac{2}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{\pi}$	$\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$	$-\frac{\sqrt{4}}{5\pi}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{7\pi}$	$\frac{\sqrt{3}}{8\pi}$
A_n	$\frac{1}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{\pi}$	$\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$	$\frac{\sqrt{3}}{5\pi}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{7\pi}$	$\frac{\sqrt{3}}{8\pi}$
φ_n		0	0	0	π	π	0	0	0

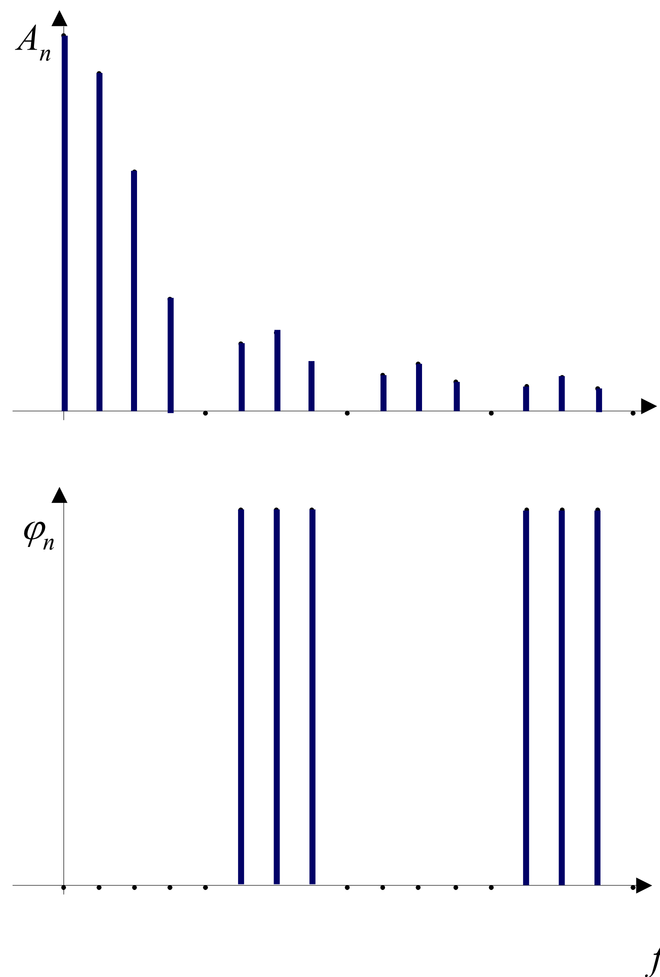


3.2 Analiza armonică a semnalelor periodice

t_1=T/4:

$$A_0=\frac{1}{4};\ n\neq 0,\ A_{nc}=\frac{1}{2}\mathrm{sinc}\left(n\frac{\pi}{4}\right)$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\Rightarrow A_{nc}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{\pi}$	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{\sqrt{2}}{3\pi}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{5\pi}$	$-\frac{1}{3\pi}$	$-\frac{\sqrt{2}}{7\pi}$	0
A_n	$\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{\pi}$	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{\sqrt{2}}{3\pi}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{5\pi}$	$\frac{1}{3\pi}$	$\frac{\sqrt{2}}{7\pi}$	0
φ_n		0	0	0	0	π	π	π	0



3.2 Analiza armonică a semnalelor periodice

3.2.3 Proprietățile SFA

Notatie: $x(t) \Leftrightarrow A_{ncx}$

a. **Teorema liniarității.**

$$x(t) = \alpha \ x_1(t) + \beta \ x_2(t) \Leftrightarrow A_{nc} = \alpha \ A_{nc1} + \beta \ A_{nc2}$$

b. **Teorema întârzierii.**

$$x_1(t) = x(t-\tau) \Leftrightarrow A_{nc1} = A_{nc} e^{-j2\pi n f_1 \tau}$$

c. **Teorema modulării.**

$$Daca \ x_1(t) = x(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t},$$

$$atunci \ x_1(t) = \left[\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{nc} \cdot e^{j2\pi n f_1 t} \right] \cdot e^{j2\pi f_0 t} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{nc} \cdot e^{j2\pi (f_0 + n f_1) t}$$

3.2 Analiza armonică a semnalelor periodice

3.2.3 Proprietățile SFA

d. **Teorema derivării.**

$$x_1(t) = x^{(k)}(t) \Leftrightarrow A_{nc1} = (j2\pi n f_1)^k \cdot A_{nc}$$

e. **Teorema integrării.**

$$x_1(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\ d\tau \Leftrightarrow A_{nc1} = \frac{A_{nc}}{j2\pi n f_1}$$

3.3 Metoda delta periodic

3.3.1 Distributii

3.3.2 Semnalul delta – periodic (δ_T)

3.3.3 Prezentarea metodei delta – periodic (δ_T)

3.3 Metoda delta periodic

3.3.1 Distributii

Distribuția *f*, bazată pe funcționala *f(t)*, atribuie funcției *x(t)* – numită funcție test – o valoare $V_f\,(x)$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\;\; f(t)\;\, dt = V_f(x)$$

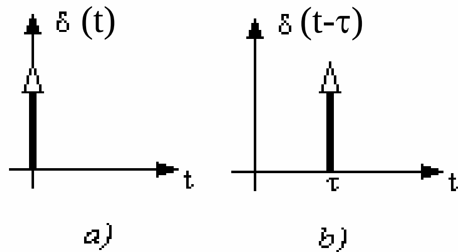
3.3 Metoda delta periodic

Distribuția impuls ideal (*Dirac*)

Distribuția impuls ideal (*Dirac*) este o funcțională – δ *(t)* – care atribuie funcției *x(t)*, continuă în *t* = 0, valoarea $V_\delta(x) = x(0)$:

$$V_\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\delta(t)\ dt = x(0)$$

- relația de normare $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\ dt = 1$



- sondare $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\delta(t-\tau)\ dt = x(\tau)$

- filtrare $\int_{-\infty}^{\infty} X(f)\cdot\delta(f-f_1)\ df = X(f_1)$

!!! $x(t)\cdot\delta(t-\tau) = x(\tau)\cdot\delta(t-\tau)$

3.3 Metoda delta periodic

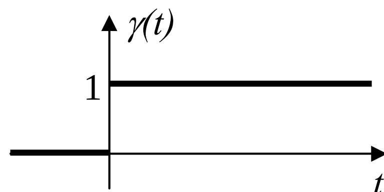
Distribuția treptă unitară (*Heaviside*)

Distribuția treaptă unitate (*Heaviside*), $\gamma(t)$, atribuie funcției test $x(t)$, integrabilă în $\Re_+$, valoarea:

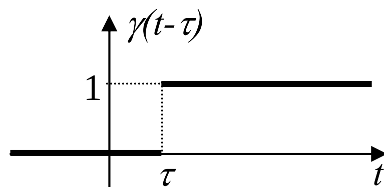
$$V_\gamma(x) = \int_0^\infty x(t)\ dt$$

Rezultă relația de definiție a distribuției treaptă unitară:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\gamma(t)\ dt = \int_0^\infty x(t)\ dt$$



$$\gamma(t) = \begin{cases} 0\ ,\ \ pentru\ \ t<0 \\ 1\ ,\ \ pentru\ \ t>0 \end{cases}$$

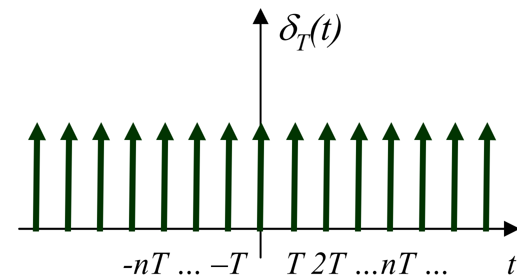


$$\frac{d\gamma}{dt} = \delta(t)\ ;\ \gamma(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau$$

3.3 Metoda delta periodic

3.3.2 Semnalul delta – periodic (δ_T)

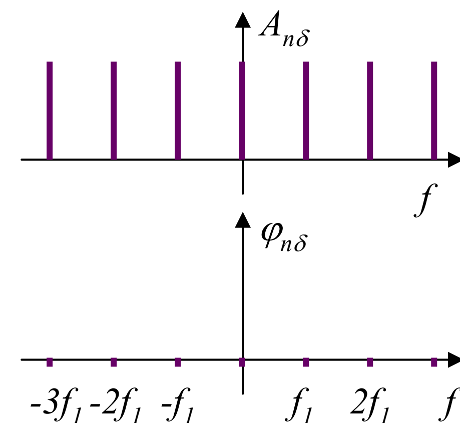
$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$$



$$A_{n\delta} = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t)\cdot e^{-j2\pi n f_1 t}dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t)\cdot e^{-j2\pi n f_1 t}dt = \frac{2}{T}$$

$$\Rightarrow \delta_T(t) = \frac{2}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi n f_1 t} =$$

$$= \frac{2}{T}[0.5+\cos(2\pi\cdot f_1 t)+\cos(2\pi\cdot 2f_1 t)+\cos(2\pi\cdot 3f_1 t)+\ldots]$$



3.3 Metoda delta periodic

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$$

$$\delta_T(t-t_1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-t_1-kT)$$

$$A_{nc\delta_T(t)} = \frac{2}{T}$$

$$A_{nc\delta'_T(t)} = \frac{2}{T}\left(j2\pi n f_1\right)$$

$$A_{nc\delta''_T(t)} = \frac{2}{T}\left(j2\pi n f_1\right)^2$$

$$A_{nc\delta^{(k)}{}_T(t)} = \frac{2}{T}\left(j2\pi n f_1\right)^k$$

$$A_{nc\delta_T(t-t_1)} = \frac{2}{T} e^{-j2\pi n f_1 t_1}$$

$$A_{nc\delta'_T(t-t_1)} = \frac{2}{T}\left(j2\pi n f_1\right) e^{-j2\pi n f_1 t_1}$$

$$A_{nc\delta''_T(t-t_1)} = \frac{2}{T}\left(j2\pi n f_1\right)^2 e^{-j2\pi n f_1 t_1}$$

$$A_{nc\delta^{(k)}{}_T(t-t_1)} = \frac{2}{T}\left(j2\pi n f_1\right)^k e^{-j2\pi n f_1 t_1}$$

3.3 Metoda delta periodic

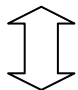
3.3.3 Prezentarea metodei delta – periodic (δ_T)

1. **Derivarea semnalului de un număr (*k*) de ori, suficient ca derivata să fie exprimată numai prin impulsuri *Dirac* şi, eventual, derivate ale acestora; acest lucru este posibil numai în cazul funcțiilor polinomiale.**
2. **Scrierea coeficienților complecşi ($A_{nc\delta}$) ai *SFA* corespunzătoare trenului de impulsuri obținut.**
3. **Revenirea la coeficienții *SFA* ai semnalului inițial, prin aplicarea (de *k* ori) a teoremei integrării:**

$$A_{nc} = \frac{A_{nc\delta}}{(j2\pi n f_1)^k}$$

3.3 Metoda delta periodic

$$x_1(t) = P_1(t)\cdot\gamma(t) + \sum_{m=1}^{\lambda-1}\left[P_{m+1}(t) - P_m(t)\right]\cdot\gamma(t-t_m) - P_\lambda(t-T)$$



$$t < 0 \rightarrow x_1(t) = 0$$
$$0 < t < t_1 \rightarrow x_1(t) = P_1(t)$$
$$t_1 < t < t_2 \rightarrow x_1(t) = P_1(t) + \left[P_2(t) - P_1(t)\right] = P_2(t)$$
$$t_2 < t < t_3 \rightarrow x_1(t) = P_1(t) + \left[P_2(t) - P_1(t)\right] + \left[P_3(t) - P_2(t)\right] = P_3(t)$$

… … …

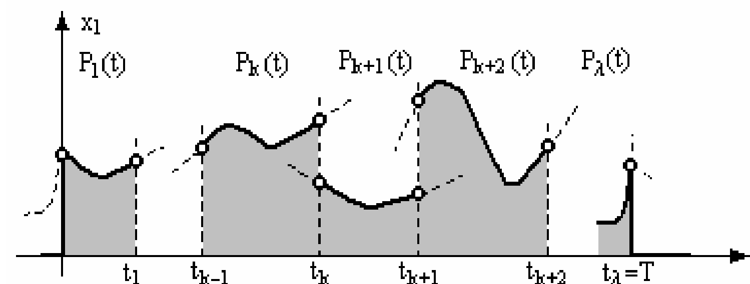


Figura 3.8. Descriere polinomială pe porțiuni a unui semnal periodic.

3.3 Metoda delta periodic

$$x_1(t) = P_1(t)\cdot\gamma(t) + \sum_{m=1}^{\lambda-1}\left[P_{m+1}(t) - P_m(t)\right]\cdot\gamma(t-t_m) - P_\lambda(t-T)\gamma(t-T)$$

$$x_1'(t) = P_1'(t)\cdot\gamma(t) + P_1(0)\cdot\delta(t) +$$

$$+\sum_{m=1}^{\lambda-1}\left\{\left[P_{m+1}'(t) - P_m'(t)\right]\cdot\gamma(t-t_m) + \left[P_{m+1}(t_m) - P_m(t_m)\right]\cdot\delta(t-t_m)\right\} -$$

$$- P_\lambda'(t)\cdot\gamma(t-T) - P_\lambda(T)\cdot\delta(t-T)$$

SCS I : Teoria semnalelor

Capitolul 1. **Introducere**

Capitolul 2. **O privire generală**

Capitolul 3. ***Semnale periodice***

Capitolul 4. **Semnale aperiodice**

Capitolul 5. **Semnale eşantionate**

Capitolul 6. **Semnale modulate**

3.3 Metoda delta periodic

3.3.1 Distributii

3.3.2 Semnalul delta – periodic (δ_T)

3.3.3 Prezentarea metodei delta – periodic (δ_T)

3.3 Metoda delta periodic

3.3.1 Distributii

Distribuția *f*, bazată pe funcționala *f(t)*, atribuie funcției *x(t)* – numită funcție test – o valoare $V_f\,(x)$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\;\; f(t)\;\, dt = V_f(x)$$

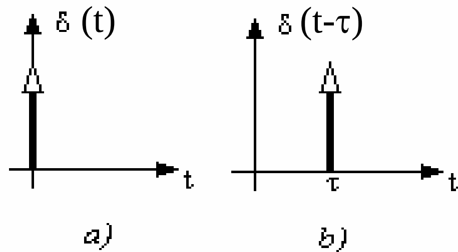
3.3 Metoda delta periodic

Distribuția impuls ideal (*Dirac*)

Distribuția impuls ideal (*Dirac*) este o funcțională – *δ (t)* – care atribuie funcției *x(t)*, continuă în *t* = 0, valoarea $V_\delta(x) = x(0)$:

$$V_\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\delta(t)\ dt = x(0) \quad \Leftrightarrow \quad \delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

- relația de normare $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\ dt = 1$



- sondare $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\delta(t-\tau)\ dt = x(\tau)$

- filtrare $\int_{-\infty}^{\infty} X(f)\cdot\delta(f-f_1)\ df = X(f_1)$

!!!

$$x(t)\cdot\delta(t-\tau) = x(\tau)\cdot\delta(t-\tau)$$

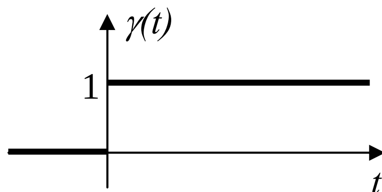
$$X(f)\cdot\delta(f-f_1) = X(f_1)\cdot\delta(f-f_1)$$

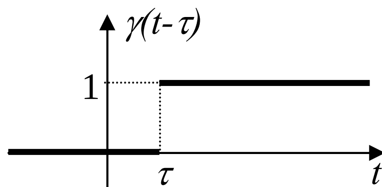
3.3 Metoda delta periodic

Distribuția treptă unitară (*Heaviside*)

Distribuția treaptă unitate (*Heaviside*), $\gamma(t)$, atribuie funcției test $x(t)$, integrabilă în $\Re_+$, valoarea: $V_\gamma(x) = \int_0^\infty x(t)\ dt$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\gamma(t)\ dt = \int_0^\infty x(t)\ dt \quad \Leftrightarrow \quad \gamma(t) = \begin{cases} 0\ , & for\ \ t<0 \\ 1\ , & for\ \ t>0 \end{cases}$$





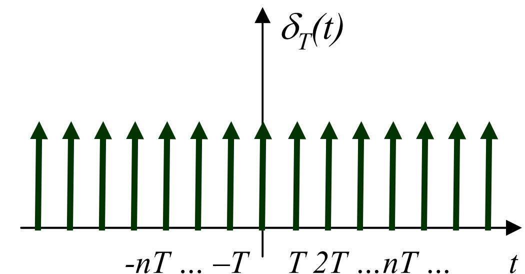
$$\frac{d\gamma}{dt} = \delta(t)\ ;$$

$$\gamma(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau.$$

3.3 Metoda delta periodic

3.3.2 Semnalul delta – periodic (δ_T)

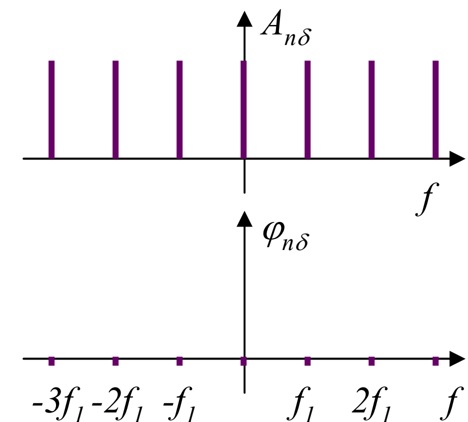
$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$$



$$A_{nc\delta} = \frac{2}{T}\int_T \delta_T(t)\cdot e^{-j2\pi n f_1 t}dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t)\cdot e^{-j2\pi n f_1 t}dt = \frac{2}{T}$$

$$\Rightarrow \delta_T(t) = \frac{2}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi n f_1 t} =$$

$$= \frac{2}{T}\left[0.5 + \cos(2\pi\cdot f_1 t) + \cos(2\pi\cdot 2 f_1 t) + \cos(2\pi\cdot 3 f_1 t) + \ldots\right]$$



3.3 Metoda delta periodic

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$$

$$\delta_T(t-t_1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-t_1-kT)$$

$$A_{nc\delta_T(t)} = \frac{2}{T}$$

$$A_{nc\delta'_T(t)} = \frac{2}{T}\left(j2\pi n f_1\right)$$

$$A_{nc\delta''_T(t)} = \frac{2}{T}\left(j2\pi n f_1\right)^2$$

$$A_{nc\delta^{(k)}{}_T(t)} = \frac{2}{T}\left(j2\pi n f_1\right)^k$$

$$A_{nc\delta_T(t-t_1)} = \frac{2}{T} e^{-j2\pi n f_1 t_1}$$

$$A_{nc\delta'_T(t-t_1)} = \frac{2}{T}\left(j2\pi n f_1\right) e^{-j2\pi n f_1 t_1}$$

$$A_{nc\delta''_T(t-t_1)} = \frac{2}{T}\left(j2\pi n f_1\right)^2 e^{-j2\pi n f_1 t_1}$$

$$A_{nc\delta^{(k)}{}_T(t-t_1)} = \frac{2}{T}\left(j2\pi n f_1\right)^k e^{-j2\pi n f_1 t_1}$$

3.3 Metoda delta periodic

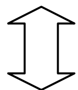
3.3.3 Prezentarea metodei delta – periodic (δ_T)

1. **Derivarea semnalului de un număr (*k*) de ori, suficient ca derivata să fie exprimată numai prin impulsuri *Dirac* şi, eventual, derivate ale acestora; acest lucru este posibil numai în cazul funcțiilor polinomiale.**
2. **Scrierea coeficienților complecşi ($A_{nc\delta}$) ai *SFA* corespunzătoare trenului de impulsuri obținut.**
3. **Revenirea la coeficienții *SFA* ai semnalului inițial, prin aplicarea (de *k* ori) a teoremei integrării:**

$$A_{nc} = \frac{A_{nc\delta}}{(j2\pi n f_1)^k}$$

3.3 Metoda delta periodic

$$x_1(t) = P_1(t)\cdot\gamma(t) + \sum_{m=1}^{\lambda-1}\left[P_{m+1}(t) - P_m(t)\right]\cdot\gamma(t-t_m) - P_\lambda(t)\cdot\gamma(t-T)$$



$$t < 0 \rightarrow x_1(t) = 0$$

$$0 < t < t_1 \rightarrow x_1(t) = P_1(t)$$

$$t_1 < t < t_2 \rightarrow x_1(t) = P_1(t) + \left[P_2(t) - P_1(t)\right] = P_2(t)$$

$$t_2 < t < t_3 \rightarrow x_1(t) = P_1(t) + \left[P_2(t) - P_1(t)\right] + \left[P_3(t) - P_2(t)\right] = P_3(t)$$

$$\dots\ \dots\ \dots$$

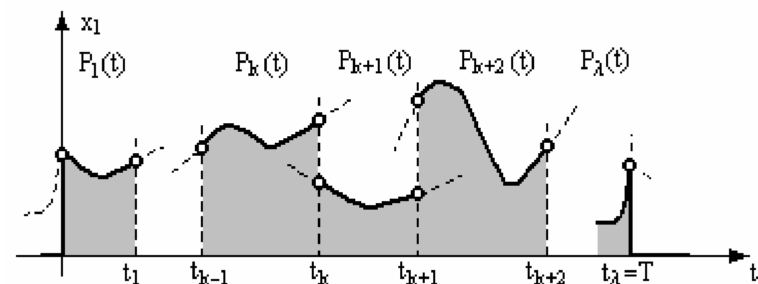


Figura 3.8. Descriere polinomială pe porțiuni a unui semnal periodic.

3.3 Metoda delta periodic

$$x_1(t) = P_1(t)\cdot\gamma(t) + \sum_{m=1}^{\lambda-1}\left[P_{m+1}(t) - P_m(t)\right]\cdot\gamma(t-t_m) - P_\lambda(t)\cdot\gamma(t-T)$$

$$x_1'(t) = P_1'(t)\cdot\gamma(t) + P_1(0)\cdot\delta(t) +$$

$$+\sum_{m=1}^{\lambda-1}\left\{\left[P_{m+1}'(t) - P_m'(t)\right]\cdot\gamma(t-t_m) + \left[P_{m+1}(t_m) - P_m(t_m)\right]\cdot\delta(t-t_m)\right\} -$$

$$- P_\lambda'(t)\cdot\gamma(t-T) - P_\lambda(T)\cdot\delta(t-T)$$

$$x_1''(t) = P_1''(t)\cdot\gamma(t) + P_1'(t)\cdot\delta(t) + P_1(0)\cdot\delta'(t) +$$

$$+\sum_{m=1}^{\lambda-1}\left\{\left[P_{m+1}''(t) - P_m''(t)\right]\cdot\gamma(t-t_m) + \left[P_{m+1}'(t) - P_m'(t)\right]\cdot\delta(t-t_m) + \left[P_{m+1}(t_m) - P_m(t_m)\right]\cdot\delta'(t-t_m)\right\} -$$

$$- P_\lambda''(t)\cdot\gamma(t-T) - P_\lambda'(t)\cdot\delta(t-T) - P_\lambda(T)\cdot\delta'(t-T)$$

$\ldots\ldots$

3.3 Metoda delta periodic

Exemplu:

$$x(t) = \begin{cases} 2t^2, t \in [3k, 3k+1) \\ 2, t \in [3k+1, 3k+2) \\ 0,, t \in [3k+2, 3(k+1)) \end{cases}$$

$$x_1(t) = 2t^2 \cdot \gamma(t) \ +(2-2t^2)\cdot\gamma(t-1) \ - \ 2\cdot\gamma(t-2)$$

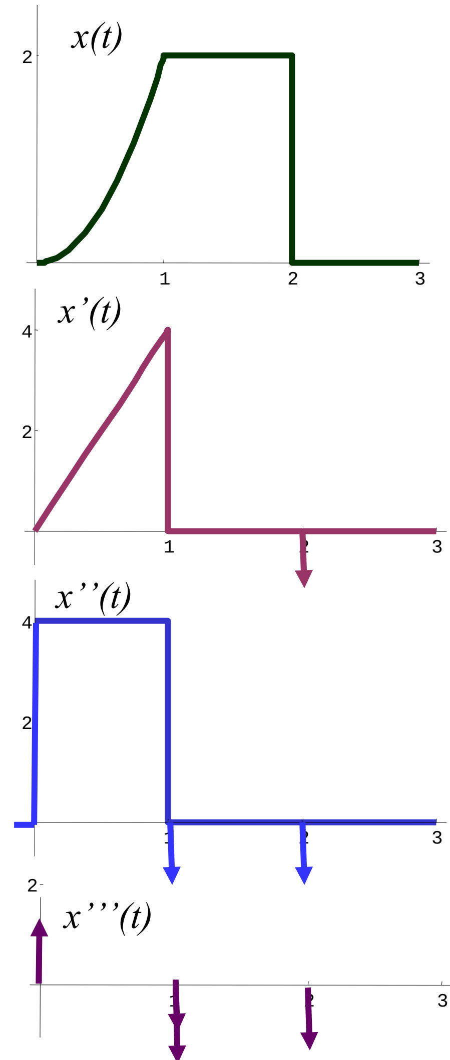
$$x_1'(t) = 4t\cdot\gamma(t) \ +2t^2\cdot\delta(t) \ +(-4t)\cdot\gamma(t-1)+(2-2t^2)\cdot\delta(t-1)-$$
$$-2\cdot\delta(t-2) = 4t\cdot\gamma(t) \ -4t\cdot\gamma(t-1)-2\cdot\delta(t-2)$$

$$x_1''(t) = 4\cdot\gamma(t) \ +4t\cdot\delta(t)-4\cdot\gamma(t-1)-4t\cdot\delta(t-1)-2\cdot\delta'(t-2) =$$
$$= 4\cdot\gamma(t) \ -4\cdot\gamma(t-1)+4\cdot\delta(t-1)-2\cdot\delta'(t-2)$$

$$x_1'''(t) = 4\cdot\delta(t) \ -4\cdot\delta(t-1)+4\cdot\delta'(t-1)-2\cdot\delta''(t-2)$$

$$n\neq 0,\ A_{nc}^{(III)} = 4\frac{2}{3}-4\frac{2}{3}e^{\frac{-j2\pi n}{3}}-4\frac{2}{3}e^{\frac{-j2\pi n}{3}}\left(\frac{j2\pi n}{3}\right)-2\frac{2}{3}e^{\frac{-4\pi n}{3}}\left(\frac{j2\pi n}{3}\right)^2$$

$$n\neq 0,\ A_{nc} = \frac{A_{nc}^{(III)}}{\left(\frac{j2\pi n}{3}\right)^3}, \quad A_0 = \frac{8}{9}$$



3. SEMNALE PERIODICE

3.1 Seturi de funcții ortogonale

3.2 Analiza armonică a semnalelor periodice

3.3 Metoda delta – periodic

3.4 *Distributia spectrala a puterii*

3.5 *Analiza aproximativa a semnalelor periodice*

3.4 Distributia spectrala a puterii

$$P = \frac{1}{T}\int_T x^2(t)\ dt = A_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 = A_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_{nc}\cdot A_{nc}^*$$

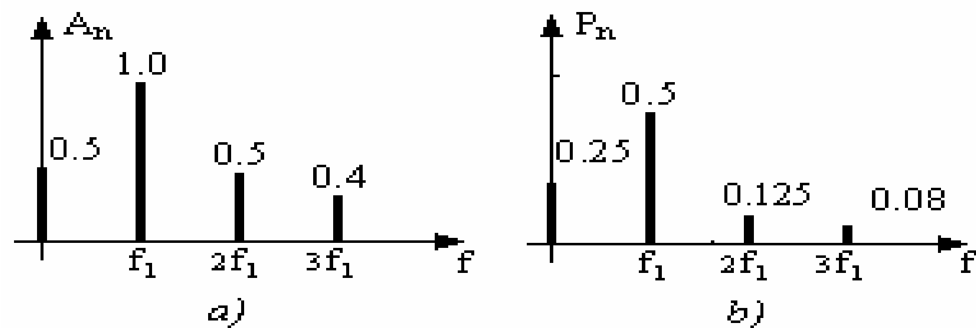


Figura 3.9. Exemplu de spectru de amplitudini (a) şi spectrul de putere corespunzător (b).

3.5 Analiza aproximativa a semnalelor periodice

3.5.1 Analiza Fourier-Walsh

3.5.2 Analiza Fourier-Haar

3.5 Analiza aproximativa a semnalelor periodice

3.5.1 Analiza Fourier-Walsh

Functii Rademacher:

$$r_n(\theta) = sign[\sin(2^n \pi\theta)]$$

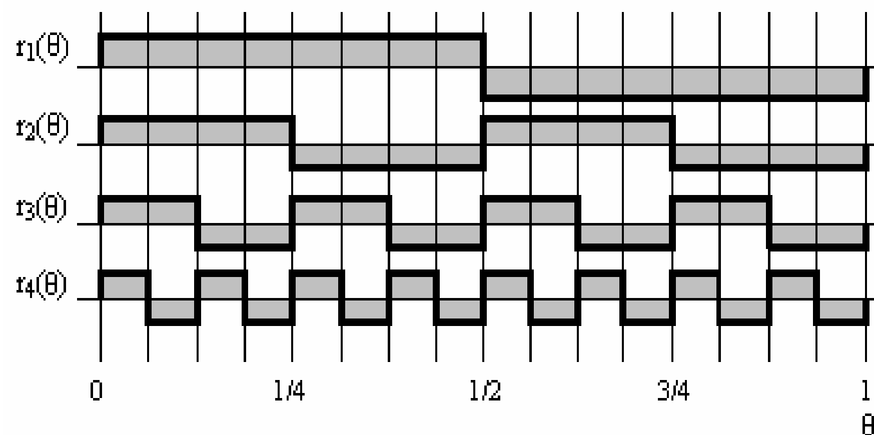


Figura 3.10. Primele patru funcții Rademacher.

3.5 Analiza aproximativa a semnalelor periodice

3.5.1 Analiza Fourier-Walsh

Functii Walsh:

$$wal_m(\theta) = \prod_{k=1}^{n} \left[r_k(\theta) \right]^{p_{mk}},$$

$$unde \quad p_{mk} = m_k \oplus m_{k+1}$$

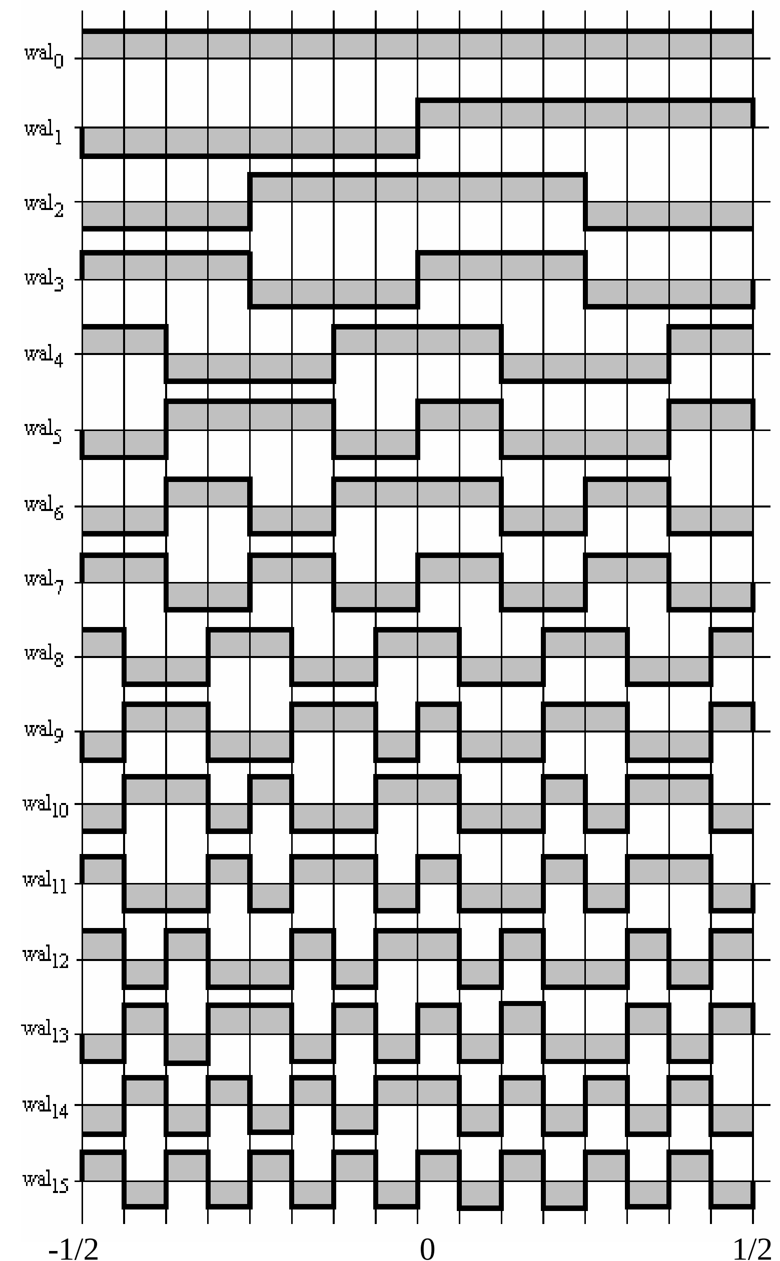


Figura 3.11. Primele 16 funcții Walsh.

3.5 Analiza aproximativa a semnalelor periodice

3.5.1 Analiza Fourier-Walsh

$$x(\theta T) = \sum_{k=0}^{K} W_k \cdot wal_k(\theta) \qquad W_k = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x(\theta T) \cdot wal_k(\theta)\, d\theta$$

$$x(t) = \sum_{k=0}^{K} W_k wal_k\left(\tfrac{t}{T}\right) \qquad W_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot wal_k\left(\tfrac{t}{T}\right)\, dt$$

Exemplu:

K=3

$$W_0 = \frac{1}{T}(I_1 + I_2 + I_3 + I_4)$$

$$W_1 = \frac{1}{T}(-I_1 - I_2 + I_3 + I_4)$$

$$W_2 = \frac{1}{T}(-I_1 + I_2 + I_3 - I_4)$$

$$W_3 = \frac{1}{T}(I_1 - I_2 + I_3 - I_4)$$

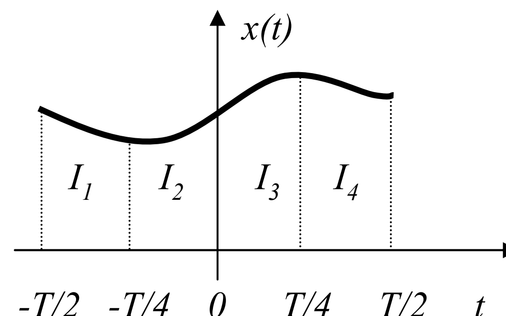


Figura 3.12. Împărțirea perioadei în patru intervale egale.

3.5 Analiza aproximativa a semnalelor periodice

3.5.2 Analiza Fourier-Haar

Functii Haar:

$$har_n(\theta) = \begin{cases} \sqrt{2^{p-1}} \ , \ pentru \ \dfrac{m}{2^{p-1}} \le \theta < \dfrac{m+0.5}{2^{p-1}} \\ -\sqrt{2^{p-1}} \ , \ pentru \ \dfrac{m+0.5}{2^{p-1}} \le \theta < \dfrac{m+1}{2^{p-1}}, \\ 0 \ , \ in \ \ rest \end{cases}$$

$$n = 2^{p-1} + m$$

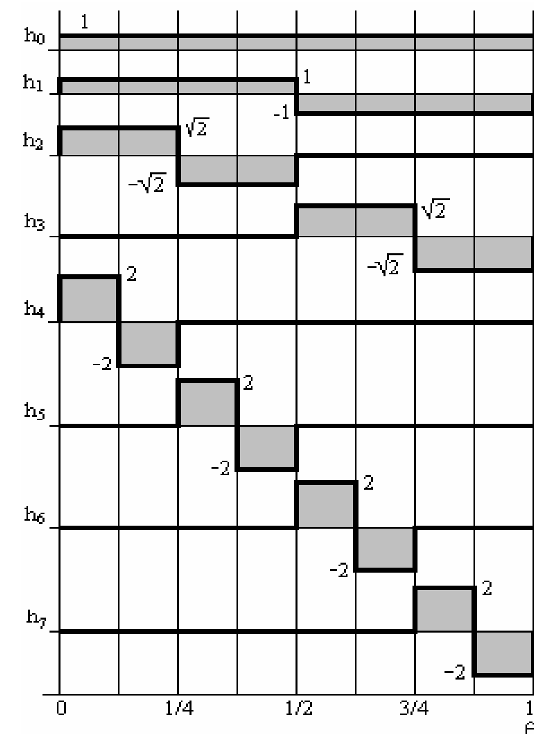


Figura 3.13. Primele opt funcții Haar.

unde:

***n* = ordinul funcției *Haar* în cadrul setului;**

***p* = ordinul grupei;**

***m* = ordinul funcției în cadrul grupei (*m* = 0, 1, …, 2^{p-1} – 1).**

3.5 Analiza aproximativa a semnalelor periodice

$$x(\theta T)=\sum_{n=0}^{N} H_n \cdot har_n(\theta) \qquad H_n=\int_0^1 x(\theta T)\cdot har_n(\theta)\ d\theta$$

$$x(t)=\sum_{n=0}^{N} H_n \cdot har_n\left(\frac{t}{T}\right) \qquad H_n=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\cdot har_n\left(\frac{t}{T}\right)\ dt$$

Exemplu:N=7

Grupa a treia:

$$H_4=2\ (S_1-S_2);H_6=2\ (S_5-S_6);$$

$$H_5=2\ (S_3-S_4);H_7=2\ (S_7-S_8)$$

Grupa a doua:

$$H_2=\sqrt{2}\ (S_1+S_2-S_3-S_4)$$

$$H_3=\sqrt{2}\ (S_5+S_6-S_7-S_8)$$

Grupa intai:

$$H_1=S_1+S_2+S_3+S_4-S_5-S_6-S_7-S_8$$

$$H_0=S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6+S_7+S_8$$

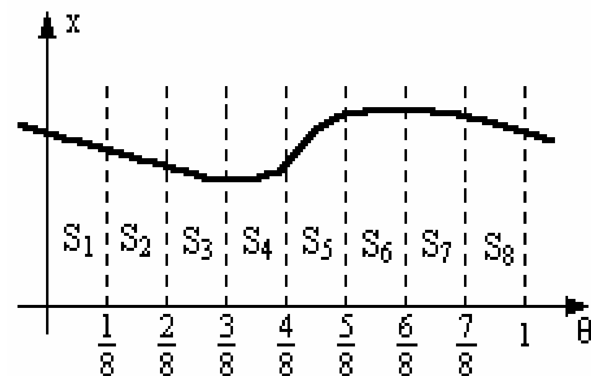


Figura 3.14. Împărțirea perioadei în opt părți egale.

SCS I : Teoria semnalelor

Capitolul 1. **Introducere**

Capitolul 2. **O privire generală**

Capitolul 3. **Semnale periodice**

Capitolul 4. ***Semnale aperiodice***

Capitolul 5. **Semnale eşantionate**

Capitolul 6. **Semnale modulate**

4. SEMNALE APERIODICE

4.1 Analiza semnalelor prin transformarea Fourier

4.2 Distributia spectrala a energiei

4.3 Corelatia semnalelor

4.4 Convolutia semnalelor aperiodice

4.5 Transformarea Laplace

4.6 Functii de transfer

4.1 Analiza semnalelor prin transformarea Fourier

4.1.1 O privire generala

4.1.2 Transformarea Fourier

4.1.3 Proprietatile transformatei Fourier

4.1.1 O privire generala

Semnale aperiodice:

- *cvasiperiodice*
- **impulsuri.**

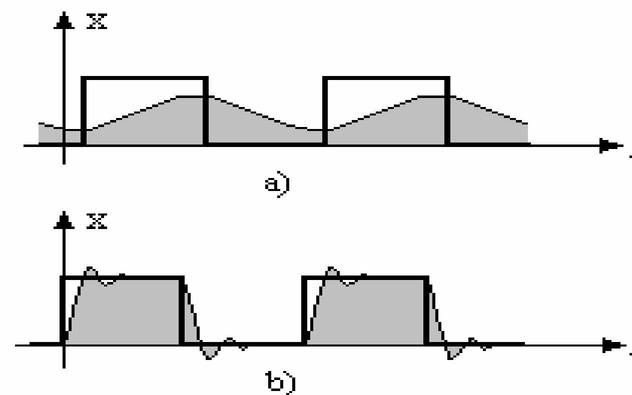


Figura 4.1. Interpretarea semnalelor în funcție de răspunsul sistemului.

4.1.2 Transformarea Fourier

Transformarea Fourier directa

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ e^{-j2\pi f t} dt$$

Transformarea Fourier inversa

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\ e^{j2\pi f t} df$$

Observatie:

$$\exists\, X(f)\ \text{(converge)} \quad daca \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \cdot dt < \infty\ \text{(absolut integrabila)}$$

4.1.2 Transformarea Fourier

Daca $x(t) \neq 0$ *pentru* $t_1 < t < t_2, 0 \leq t_1 \ \& \ t_2 \leq T$

atunci $A_{nc} = \frac{2}{T} \cdot \int_{t_1}^{t_2} x(t) \ e^{-j2\pi n f_1 t} \ dt.$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{2}{T} \cdot \int_{t_1}^{t_2} x(\tau) e^{-j2\pi n f_1 \tau} d\tau \right] e^{j2\pi n f_1 t} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{t_1}^{t_2} x(\tau) e^{-j2\pi n f_1 \tau} d\tau \right] e^{j2\pi n f_1 t} \cdot f_1$$

Notam $1/T = f_1 \Rightarrow \quad T \to \infty, \ f_1 \to df, \ nf_1 \to f$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} \ d\tau \right] e^{j2\pi f t} \ df$$

4.1.2 Transformarea Fourier

Pereche Fourier: $x(t) \Leftrightarrow X(f)$

X(f) **densitate spectrala**

$$X(f) = X_{re}(f) + j \cdot X_{im}(f) \; ,$$

$$X_{re}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(2\pi ft)dt \; ; \; X_{re}(-f) = X_{re}(f)$$

$$X_{im}(f) = -\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin(2\pi ft)dt; \; X_{im}(-f) = -X_{im}(f)$$

4.1.2 Transformarea Fourier

Densitate spectrala de amplitudine

$$\left|X(f)\right| = \sqrt{X_{re}^2(f) + X_{im}^2(f)}\ , \quad \left|X(-f)\right| = \left|X(f)\right|$$

Spectrul de faze

$$\varphi(f) = arctg\frac{X_{im}(f)}{X_{re}(f)}, \quad \varphi(-f) = -\varphi(f)$$

4.1.2 Transformarea Fourier

Legatura dintre coeficientii complecsi A_{nc} ai seriei Fourier ai semnalului periodic $x(t)$ si densitatea spectrala $X(f)$ a impulsului $x_1(t)$

$$A_{nc} = \frac{2}{T} X(nf_1)$$

$$unde \quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(t - kT)$$

4.1.3 Proprietatile transformatei Fourier

Teorema liniaritatii

$$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \Leftrightarrow \alpha X_1(f) + \beta X_2(f)$$

Teorema derivarii

$$x'(t) \Leftrightarrow j2\pi f \; X(f)$$

Teorema integrarii

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau \Leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} X(f)$$

Teorema intarzierii

$$x(t - t_0) \Leftrightarrow e^{-j2\pi f t_0} \; X(f)$$

4.1.3 Proprietatile transformatei Fourier

Teorema modularii

$$x(t)\,e^{j2\pi f_0 t} \Leftrightarrow X(f - f_0)$$

Teorema comprimarii timpului

$$x\left(\frac{t}{\alpha}\right) \Leftrightarrow \alpha\, X(\alpha f)$$

Teorema simetriei

$$x(t) \Leftrightarrow X(f)$$

$$x_1(t) = X(t) \Leftrightarrow X_1(f) = x(-f)$$

Teorema lui Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(f)X_2(-f)df$$

4.2 Distributia spectrala a energiei

Energia totala a unui impuls

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left|X(f)\right|^2 df =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} S(f)df = 2\int_{0}^{\infty} S(f)df$$

SCS I : Teoria semnalelor

Capitolul 1. **Introducere**

Capitolul 2. **O privire generală**

Capitolul 3. **Semnale periodice**

Capitolul 4. ***Semnale aperiodice***

Capitolul 5. **Semnale eşantionate**

Capitolul 6. **Semnale modulate**

4. SEMNALE APERIODICE

4.1 Analiza semnalelor prin transformarea Fourier

4.2 Distributia spectrala a energiei

4.3 Corelatia semnalelor

4.4 Convolutia semnalelor aperiodice

4.5 Transformarea Laplace

4.6 Functii de transfer

4.3 Corelatia semnalelor

4.3.1 Functia de intercorelatie

4.3.2 Functia de autocorelatie

4.3 Corelatia semnalelor

4.3.1 Functia de intercorelatie

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{\theta\to\infty} \frac{1}{\theta} \int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} x(t+\tau)\cdot y(t)\ \ dt = \lim_{\theta\to\infty} \frac{1}{\theta} \int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} x(t)\cdot y(t-\tau)\ \ dt$$

Pentru semnale periodice de perioada T:

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t+\tau)\cdot y(t)\ \ dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\cdot y(t-\tau)\ \ dt$$

Pentru semnale aperiodice:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)\cdot y(t)\cdot dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot y(t-\tau)\cdot dt$$

4.3 Corelatia semnalelor

Proprietati:

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau)$$

$$R_{xy}(\tau) \equiv 0 \Leftrightarrow x(t), y(t) \, necorelate$$

Pentru semnale periodice de perioada T:

$$S_{nc} = \frac{1}{2} \cdot A_{ncx} \cdot A_{ncy}^{*}$$

Pentru semnale aperiodice:

$$S_{xy}(f) = X(f) \cdot Y^{*}(f)$$

4.3 Corelatia semnalelor

4.3.2 Functia de autocorelatie

Pentru semnale periodice de perioada T:

$$R_{xx}(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t+\tau)\cdot x(t)\ \ dt \qquad S_{nc}=\frac{1}{2}\cdot A_{ncx}\cdot A_{ncx}^{\ *}=\frac{1}{2}\left|A_{nc}\right|^2=\frac{1}{2}A_n^{\ 2}$$

Pentru semnale aperiodice:

$$R_{xx}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)\cdot x(t)\ \ dt \qquad S_{xx}=X(f)\cdot X^*(f)=\left|X(f)\right|^2=S(f)$$

Proprietati:

$$R_{xx}(\tau)=R_{xx}(-\tau)$$

$$R_{xx}(0)\geq R_{xx}(\tau)$$

4.4 Convolutia semnalelor aperiodice

4.4.1 Produsul de convolutie

4.4.2 Convolutia in analiza semnalelor

4.4.3 Convolutia in analiza sistemelor

4.4 Convolutia semnalelor aperiodice

4.4.1 Produsul de convolutie

$$x(t) = x_1(t) \otimes x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau) \cdot d\tau \quad \Leftrightarrow \quad X(f) = X_1(f) \cdot X_2(f)$$

Proprietatile convolutiei:

$$x'(t) = x_1'(t) \otimes x_2(t) = x_1(t) \otimes x_2'(t)$$

$$x(t) = x_1(t) \cdot x_2(t) \quad \Leftrightarrow \quad X(f) = X_1(f) \otimes X_2(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\lambda) \cdot X_2(f-\lambda) \cdot d\lambda$$

4.4 Convolutia semnalelor aperiodice

4.4.2 Convolutia in analiza semnalelor

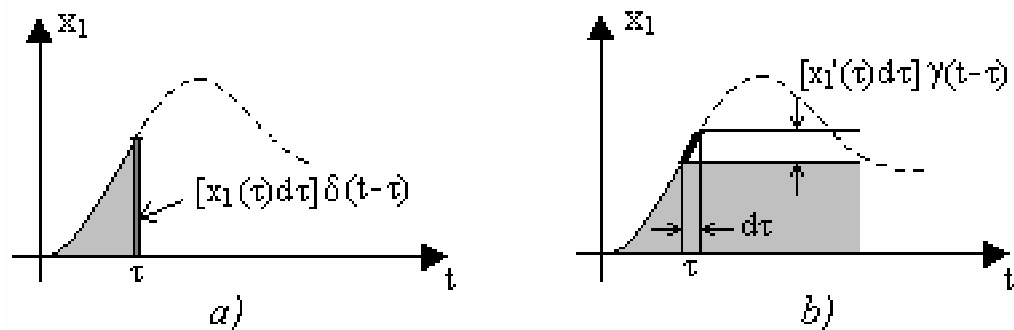


Figura 4.2 Inspectia semnalului in fasii verticale (a), respectiv orizontale (b)

$$x_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\cdot\delta(t-\tau)\ d\tau \qquad x_1(t) = \int_{-\infty}^{t} x_1'(\tau)\cdot\gamma(t-\tau)\ d\tau$$

4.4 Convolutia semnalelor aperiodice

4.4.3 Convolutia in analiza sistemelor

$$\delta(t) \to h(t) \quad \text{(functia pondere)}$$

$$\delta(t-\tau) \to h(t-\tau)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot\delta(t-\tau)\ d\tau \to \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot h(t-\tau)\ d\tau$$

$$x(t) \to y(t)$$

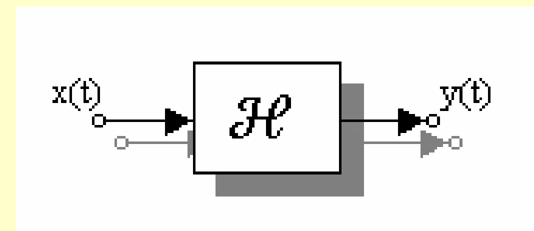


Figura 4.3 Sistem liniar cu o intrare si o iesire

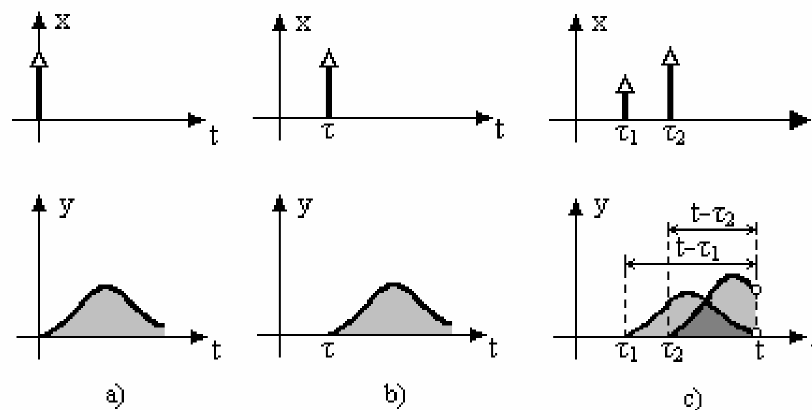


Figura 4.4 Raspunsul unui sistem liniar si invariant la impulsuri

4.4 Convolutia semnalelor aperiodice

$$x(t) \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\cdot h(t-\tau)\cdot d\tau \quad \Leftrightarrow \quad Y(f) = X(f)\cdot H(f)$$

$\gamma(t) \rightarrow a(t)$ (raspuns indicial)

$$x(t) \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{t} x'(\tau)\cdot a(t-\tau)\cdot d\tau$$

$$y(t) = x(0)a(t) + \int_{+0}^{t} x'(\tau)\cdot a(t-\tau)\cdot d\tau = x(t)a(0) + \int_{+0}^{t} x(\tau)\cdot a'(t-\tau)\cdot d\tau =$$

(relatiile lui Duhamel)

$$= x(0)a(t) + \int_{+0}^{t} x'(t-\tau)\cdot a(\tau)\cdot d\tau = x(t)a(0) + \int_{+0}^{t} x(t-\tau)\cdot a'(\tau)\cdot d\tau$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ
DIN CLUJ-NAPOCA

SCS I : Teoria semnalelor

Capitolul 1. **Introducere**

Capitolul 2. **O privire generală**

Capitolul 3. **Semnale periodice**

Capitolul 4. ***Semnale aperiodice***

Capitolul 5. **Semnale eşantionate**

Capitolul 6. **Semnale modulate**

4. SEMNALE APERIODICE

4.1 Analiza semnalelor prin transformarea Fourier

4.2 Distributia spectrala a energiei

4.3 Corelatia semnalelor

4.4 Convolutia semnalelor aperiodice

4.5 Transformarea Laplace

4.6 Functii de transfer

4.5 Transformarea Laplace (Fourier complexa)

4.5.1 Transformarea Laplace bilaterala

4.5.2 Transformarea Laplace (unilaterala)

4.5.3 Conditii de existenta a transformatei Fourier

4.5.4 Transformarea Laplace inversa

4.5.5 Proprietati ale transformatei Laplace

4.5 Transformarea Laplace (Fourier complexa)

4.5.1 Transformarea Laplace bilaterala

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt$$

Convergenta transformatei

$$x_1(t) = x(t) \cdot e^{-\alpha t}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x_1(t)| dt \le \infty \Rightarrow$$

$$|x(t)| \le \begin{cases} M_1 e^{at}, 0 < t_1 < t \\ M_2 e^{bt}, t < t_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \quad a < \alpha < b$$

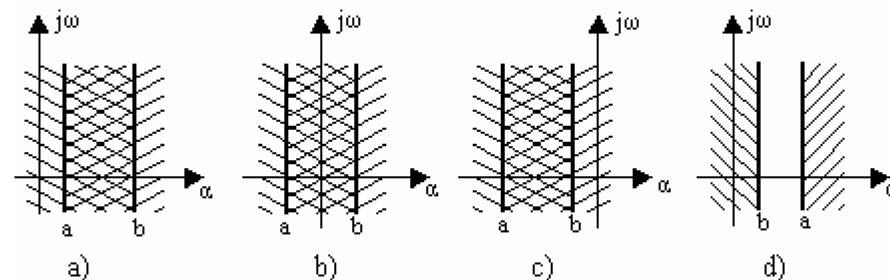


Figura 4.6 Variante de domenii de convergenta

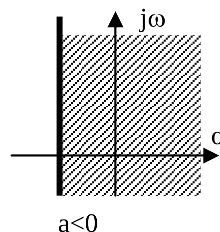
4.5 Transformarea Laplace (Fourier complexa)

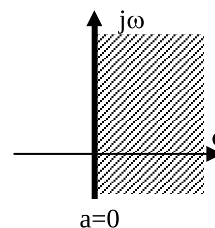
4.5.2 Transformarea Laplace (unilaterala)

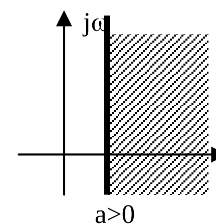
$$X(s) = \int_0^\infty x(t) \cdot e^{-st} dt$$

Convergenta transformatei

$$\alpha > a$$







Puncte critice:

-poli p_k $\qquad X(p_k) = \infty$

-zerouri z_k $\qquad X(z_k) = 0$

4.5 Transformarea Laplace (Fourier complexa)

4.5.3 Conditii de existenta a transformatei Fourier

- daca toti polii transformatei Laplace sunt situati strict in semiplanul stang, atunci:

$$X(f) = X(s)\Big|_{s=j2\pi f}$$

- daca polii transformatei Laplace sunt in semiplanul stang, dar exista poli imaginari, atunci:

$$X(f) = \lim_{s \to j2\pi f} X(s)$$

4.5 Transformarea Laplace (Fourier complexa)

4.5.4 Transformarea Laplace inversa

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s) \cdot e^{st} ds$$

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} \underset{p_k}{rez}\left[X(s) \cdot e^{p_k t} \right]$$

$$Pt.\ poli\ simpli\ x(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot e^{p_k t}$$

e^{pkt} = mod de oscilatie

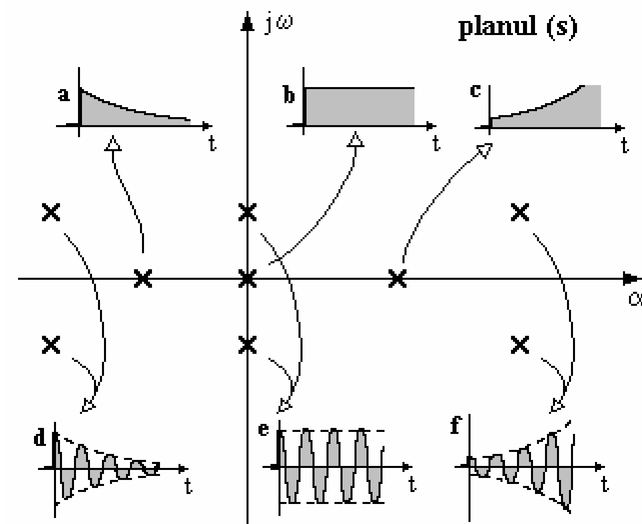


Figura 4.7 Aspectul modurilor de oscilatie in functie de pozitia polilor in planul complex s

4.5 Transformarea Laplace (Fourier complexa)

4.5.5 Proprietati ale transformatei Laplace

$$x(t) \Leftrightarrow X(s)$$

Teorema liniaritatii

$$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \Leftrightarrow \alpha X_1(s) + \beta X_2(s)$$

Teorema derivarii originalului

$$x'(t) \Leftrightarrow s\, X(s) - x(0_+)$$

Teorema integrarii originalului

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \Leftrightarrow \frac{1}{s} X(s)$$

Teorema intarzierii originalului

$$x(t - t_0) \Leftrightarrow e^{-st_0}\, X(s)$$

4.5 Transformarea Laplace (Fourier complexa)

Teorema modularii

$$x(t)\,e^{s_0 t} \Leftrightarrow X(s-s_0)$$

Teorema comprimarii timpului

$$x\left(\frac{t}{\alpha}\right) \Leftrightarrow \alpha\, X(\alpha s)$$

Teorema derivarii imaginii

$$t\cdot x(t) \Leftrightarrow -X'(s)$$

Teorema integrarii imaginii

$$\frac{x(t)}{t} \Leftrightarrow \int_s^{\infty} X(s)ds$$

4.5 Transformarea Laplace (Fourier complexa)

Teorema convolutiei in timp

$$x_1(t) \otimes x_2(t) \Leftrightarrow X_1(s) \cdot X_2(s)$$

Teorema convolutiei in *s*

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \Leftrightarrow X_1(s) \otimes X_2(s)$$

4.6 Functii de transfer (f.d.t)

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

in conditii initiale nule

$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0}$$

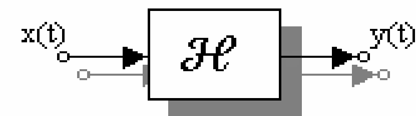


Figura 4.3 Sistem liniar cu o intrare si o iesire

Functia de transfer (f.d.t)

$$H(s) = \left.\frac{Y(s)}{X(s)}\right|_{\text{conditii initiale nule}}$$

Observatii:

$$H(s) = L\{h(t)\}$$

$$H(j\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega}$$

5. SEMNALE ESANTIONATE

5.1 Generalitati

5.2 Esantionarea reala

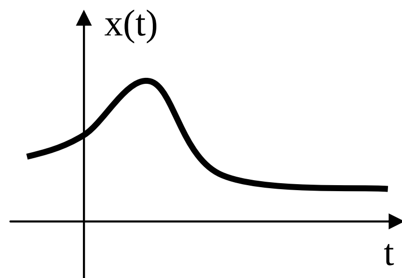
5.3 Esantionarea ideala

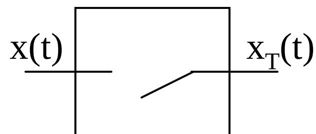
5.4 Transformata Z

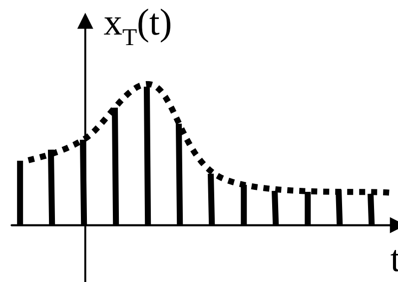
5.5 Reconstituirea semnalelor esantionate

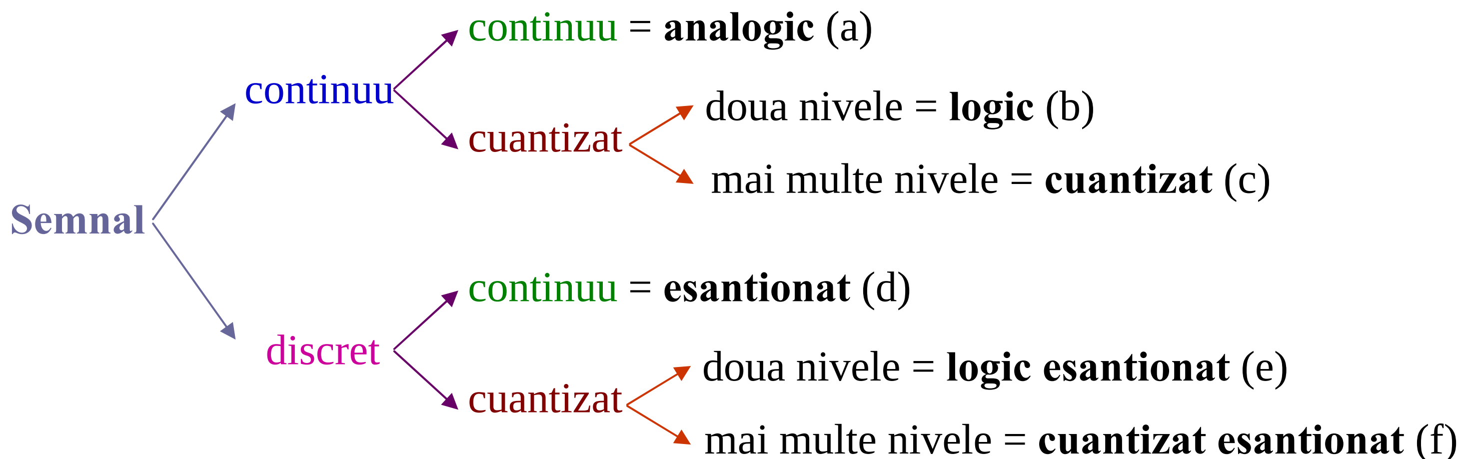
5. SEMNALE ESANTIONATE

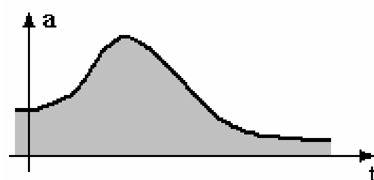
5.1 Generalitati

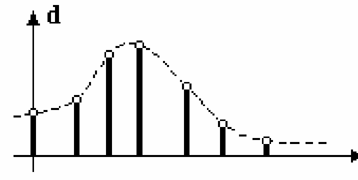


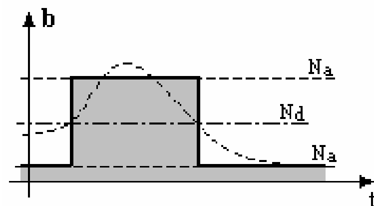


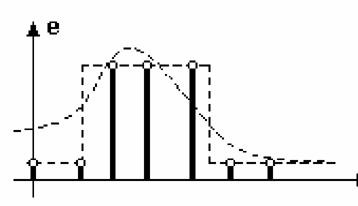


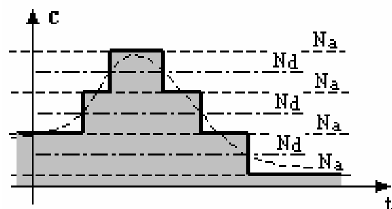

Semnal
continuu
continuu = **analogic** (a)
cuantizat
doua nivele = **logic** (b)
mai multe nivele = **cuantizat** (c)
discret
continuu = **esantionat** (d)
cuantizat
doua nivele = **logic esantionat** (e)
mai multe nivele = **cuantizat esantionat** (f)

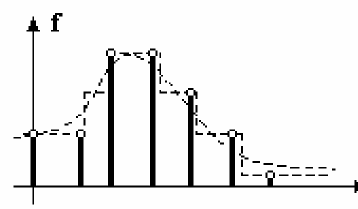

a
t


d
t


b
Na
Nd
Na
t


e
t


c
Na
Nd
Na
Nd
Na
Nd
Na
t


f
t

5. SEMNALE ESANTIONATE

5.2 Esantionarea reala

$$x_T(t) = x(t)\cdot p_\tau^{\,T}(t)$$

$$p_\tau^{\,T}(t) = A_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} A_{ncp}\cdot e^{j2\pi n f_p t}$$

$$unde: \quad f_p = \frac{1}{T};\; A_0 = \frac{\tau}{T};\; A_{ncp} = \frac{2}{T}\cdot\tau\cdot Sa(\pi n f_p t)$$

$$x_T(t) = A_0\cdot x(t) + \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} A_{ncp}\cdot\left[x(t)\cdot e^{j2\pi n f_p t}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{X_T(f) = A_0\cdot X(f) + \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} A_{ncp}\cdot X(f - n f_p)}$$

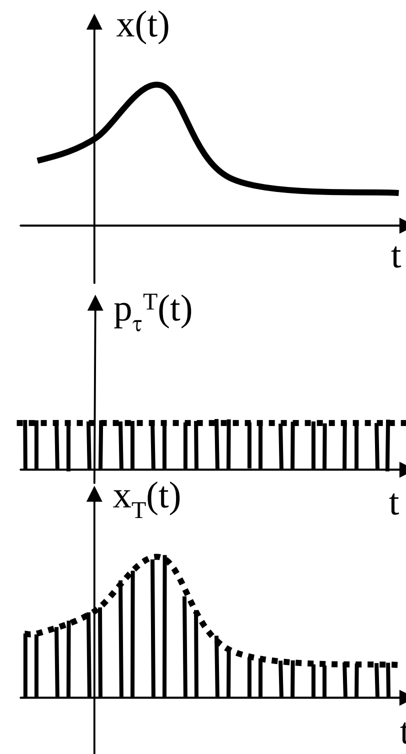


Figura 5.2 Esantionarea reala

5. SEMNALE ESANTIONATE

Teorema esantionarii (Shannon): Pentru ca semnalul analogic sa poata fi reconstituit din esantioanele sale, frecventa de esantionare trebuie sa fie mai mare decat dublul frecventei maxime din spectrul semnalului analogic transmis:

$$f_p > 2 f_s$$

SCS I : Teoria semnalelor

Capitolul 1. **Introducere**

Capitolul 2. **O privire generală**

Capitolul 3. **Semnale periodice**

Capitolul 4. **Semnale aperiodice**

Capitolul 5. ***Semnale eşantionate***

Capitolul 6. **Semnale modulate**

5. SEMNALE ESANTIONATE

5.1 Generalitati

5.2 Esantionarea reala

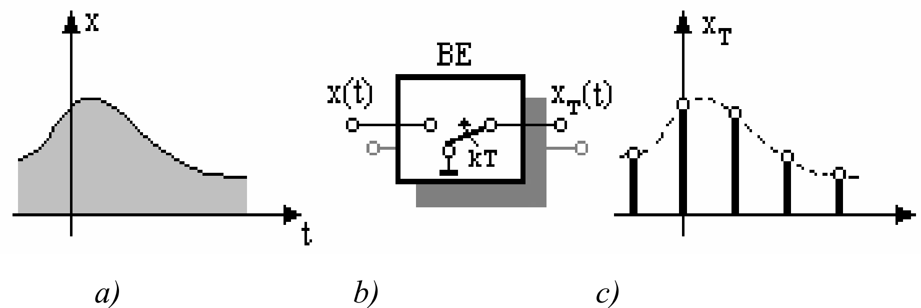
5.3 Esantionarea ideala

5.4 Transformata Z

5.5 Reconstituirea semnalelor esantionate

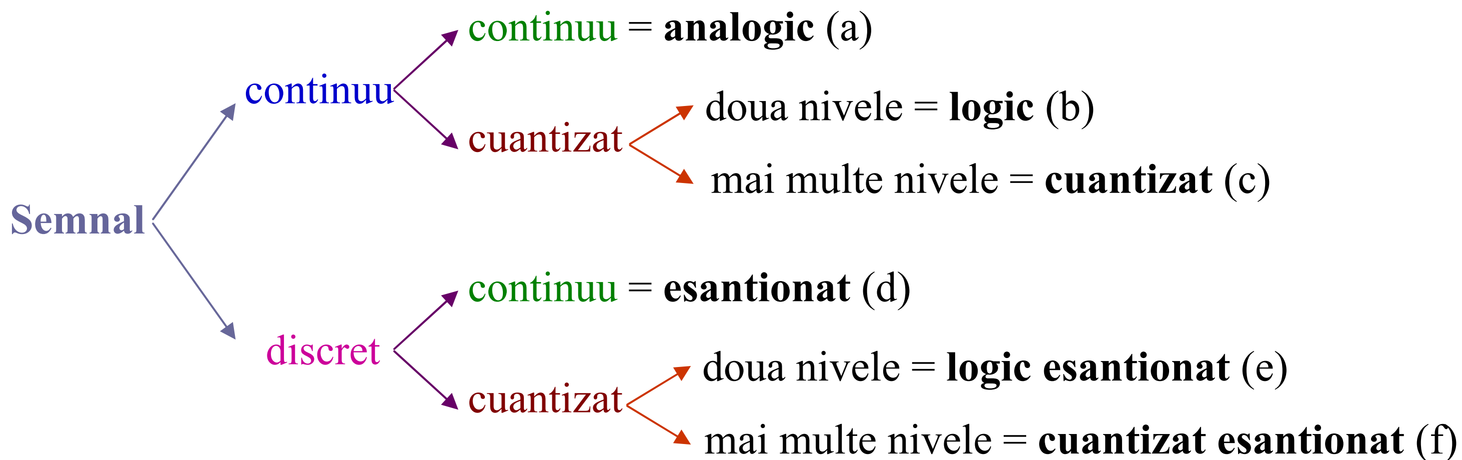
5. SEMNALE ESANTIONATE

5.1 Generalitati

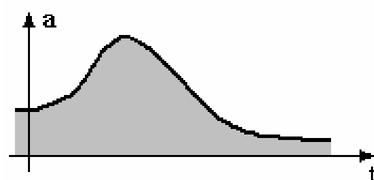


a) *b)* *c)*

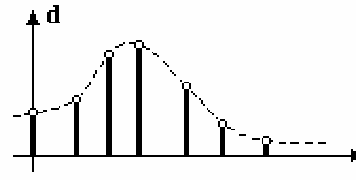
Figura 5.1.Eşantionarea unui semnal analogic.



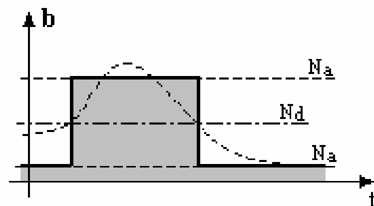
Semnal
continuu
continuu = **analogic** (a)
cuantizat
doua nivele = **logic** (b)
mai multe nivele = **cuantizat** (c)
discret
continuu = **esantionat** (d)
cuantizat
doua nivele = **logic esantionat** (e)
mai multe nivele = **cuantizat esantionat** (f)



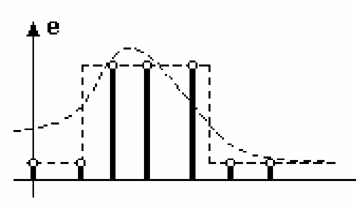
a
t



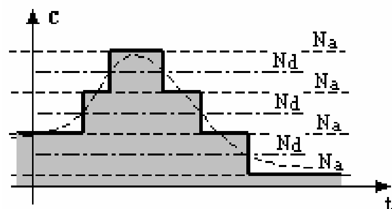
d
t



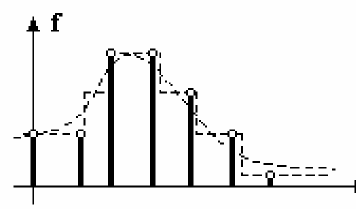
b
Na
Nd
Na
t



e
t



c
Na
Nd
Na
Nd
Na
Nd
Na
t



f
t

5. SEMNALE ESANTIONATE

5.2 Esantionarea reala

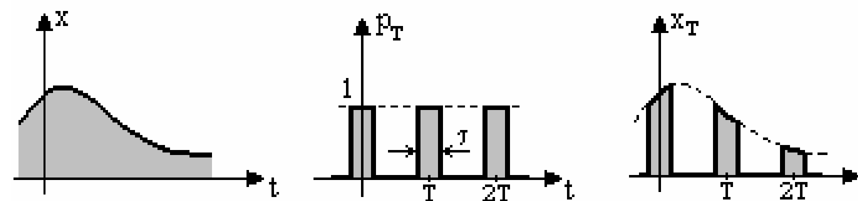


Figura 5.2 Esantionarea reala

$$x_T(t) = x(t) \cdot p_\tau{}^T(t)$$

$$p_\tau{}^T(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{ncp} \cdot e^{j2\pi n f_p t}$$

$$unde: \quad f_p = \frac{1}{T};\ A_{ncp} = \frac{2}{T} \cdot \tau \cdot Sa(\pi n f_p t)$$

$$x_T(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{ncp} \cdot \left[x(t) \cdot e^{j2\pi n f_p t} \right]$$

$$\Rightarrow \quad X_T(f) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{ncp} \cdot X(f - n f_p)$$

5. SEMNALE ESANTIONATE

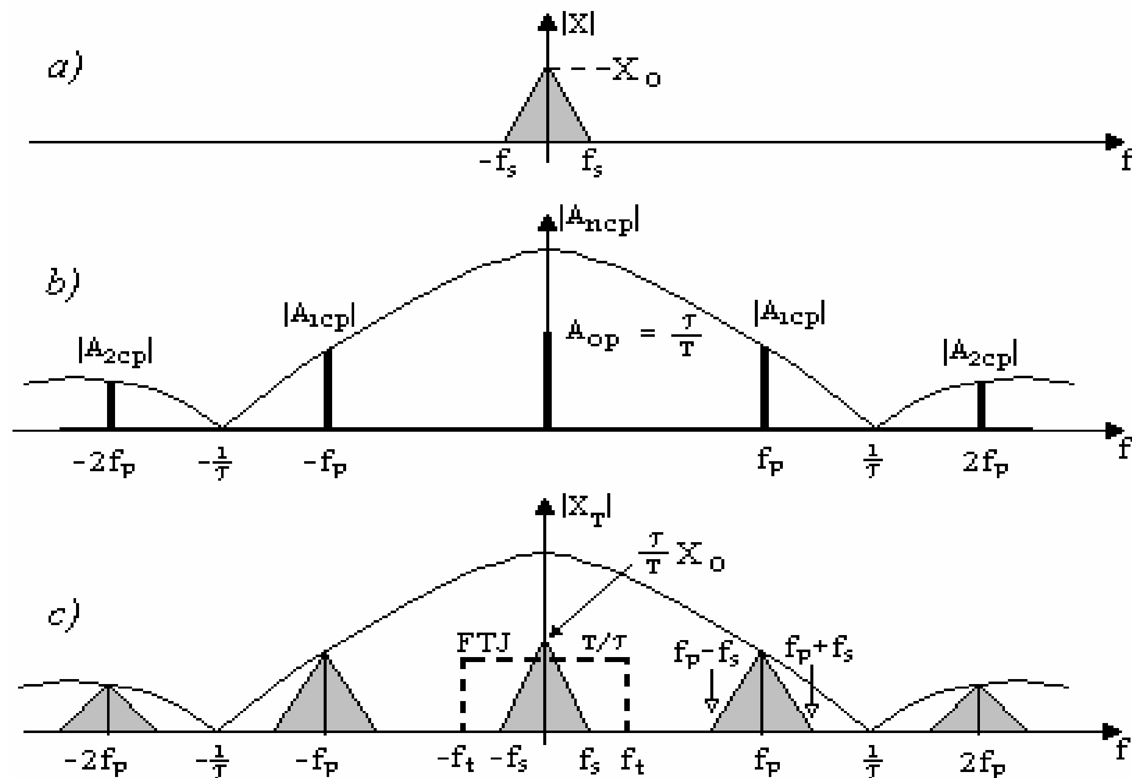


Figura 5.3. Spectrele semnalului analog (a), al trenului de impulsuri (b) şi al semnalului eşantionat (c).

5. SEMNALE ESANTIONATE

Teorema esantionarii (Shannon): Pentru ca semnalul analogic sa poata fi reconstituit din esantioanele sale, frecventa de esantionare trebuie sa fie mai mare decat dublul frecventei maxime din spectrul semnalului analogic transmis:

$$f_p > 2 f_s$$

5. SEMNALE ESANTIONATE

5.3 Esantionarea ideala

$$x_T(t) = x(t) \cdot \delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \;\; \delta(t - kT)$$

$$X_T(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_p)$$

5. SEMNALE ESANTIONATE

5.4 Transformata Z

- **Transformata Z bilaterala**

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\ z^{-k} = X_{+}(z) + X_{-}(z)$$

- **Transformata Z unilaterala**

$$X(z) = X_{+}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \cdot z^{-k}$$

5. SEMNALE ESANTIONATE

5.4 Transformata Z

$$z = e^{sT}$$

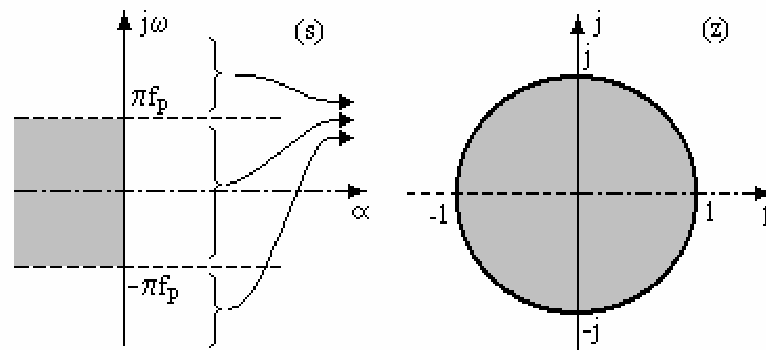


Figura 5.4. Legătura între planele (s) şi (z).

5. SEMNALE ESANTIONATE

5.4 Transformata Z

Proprietati:

$$x(t) \Leftrightarrow X(z)$$

Liniaritatea

$$\alpha \cdot x_1(n) + \beta \cdot x_2(n) \Leftrightarrow \alpha \cdot X_1(z) + \beta \cdot X_2(z)$$

Intarzierea secventei

$$x_1(n) = \{x(n-k)\} \Leftrightarrow X_1(z) = z^{-k} \quad X(z)$$

Convolutia secventelor

$$\{y(n)\} = \{x(n)\} \otimes \{h(n)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \{x(k)\}\,\{h(n-k)\} \Leftrightarrow Y(z) = X(z) \cdot H(z)$$

5. SEMNALE ESANTIONATE

5.4 Transformata Z

Transformarea *Z-biliniară* (*TZB*)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots$$

$$\Rightarrow \ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots\right)$$

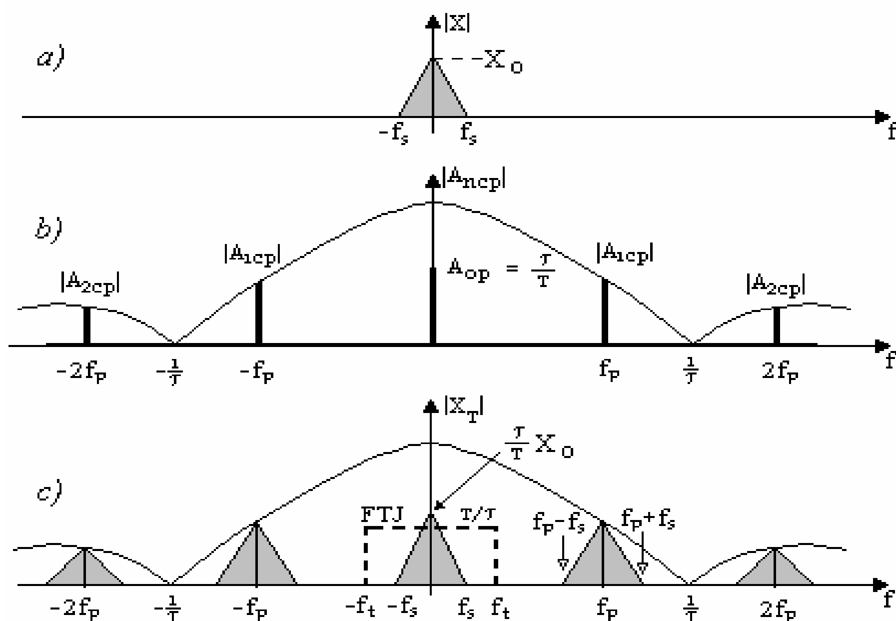
$$\Rightarrow s = \frac{1}{T}\ln z = \frac{1}{T}\ln\frac{1+x}{1-x} \simeq \frac{2}{T}\;\frac{z-1}{z+1}$$

$$TZB\{x(t)\} = \frac{1}{T}X(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}$$

5. SEMNALE ESANTIONATE

5.5 Reconstituirea semnalelor esantionate

Filtrarea ideală (prin interpolare)



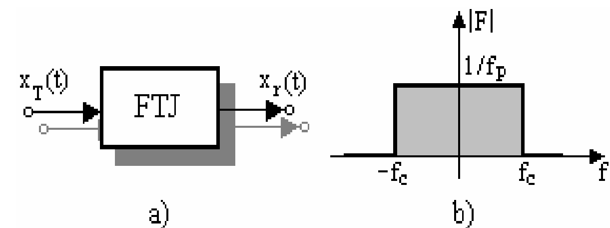


Figura 5.6. Filtrarea semnalului eşantionat (a) şi caracteristica ideală (b).

$$X_r(f) = X_T(f) \cdot F(f)$$

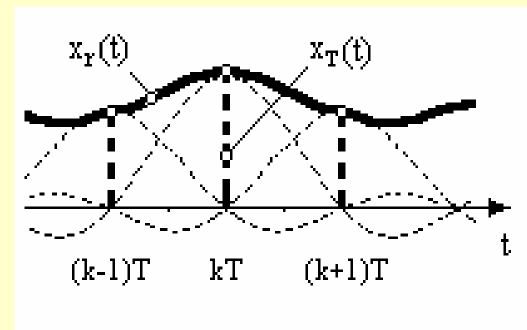
5. SEMNALE ESANTIONATE

5.5 Reconstituirea semnalelor esantionate

$$X_r(f) = X_T(f) \cdot F(f) \Rightarrow x_r(t) = x_T(t) \otimes \varphi(t) \;\; unde \; \varphi(t) = \frac{2 f_c}{f_p} \cdot Sa(2\pi f_c t)$$

$$x_r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \;\; \delta(\tau - kT) \;\; Sa \;\; [2\pi \;\; f_c(t-\tau)] \;\; d\tau = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - kT) \;\; Sa \;\; [\pi \;\; f_p(t-\tau)] \;\; d\tau$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \;\; Sa[\pi f_p (t - kT)]$$



5. SEMNALE ESANTIONATE

5.5 Reconstituirea semnalelor esantionate

Filtrarea prin extrapolare

$$x_r(t) = x(kT) + x'(kT)\ (t-kT) + \frac{x''(kT)}{2}(t-kT)^2 + \ldots,\ t \in [kT,\ (k+1)T)$$

$$x'(kT) = \frac{1}{T}\{x(kT) - x[(k-1)T]\}$$

$$unde: \quad x''(kT) = \frac{1}{T^2}\{x(kT) - 2x[(k-1)T] + x[(k-2)T]\}$$

$$\ldots$$

5. SEMNALE ESANTIONATE

5.5 Reconstituirea semnalelor esantionate

Extrapolatorul de ordin zero

$$x_r(t) = x(kT),\ t \in [kT,\ (k+1)T]$$

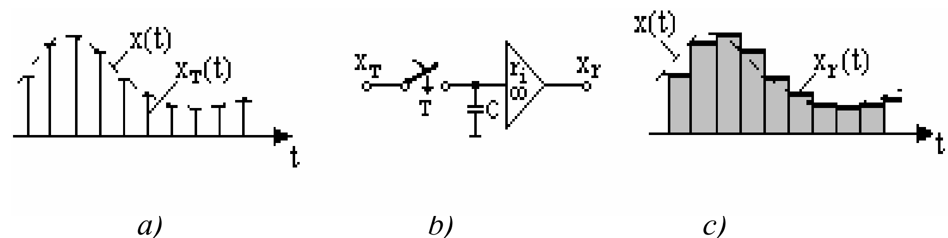


Figura 5.8. Extrapolator de ordinul zero.

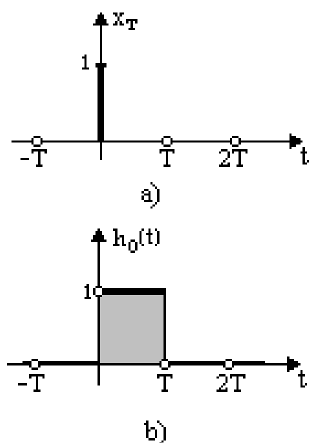


Figura 5.9. Funcția pondere a extrapolatorului de ordin zero.

$$\Rightarrow H_0(f) = T \cdot Sa(\pi f T) \cdot e^{-j2\pi f \frac{T}{2}}$$

5. SEMNALE ESANTIONATE

5.5 Reconstituirea semnalelor esantionate

$$X_r(f) = X_T(f) \cdot H_0(f)$$

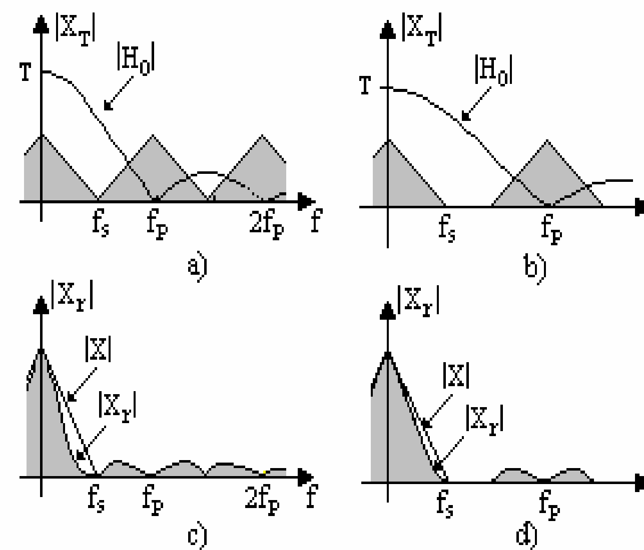


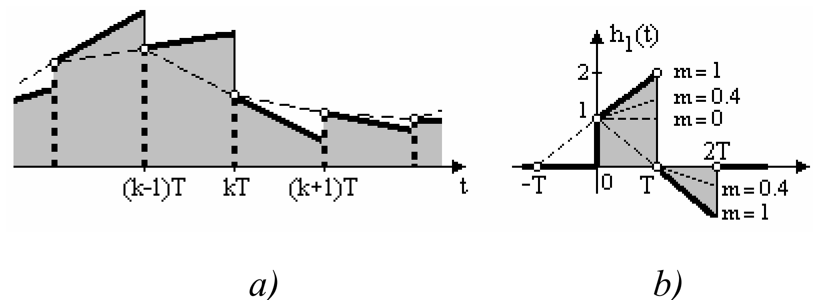
Figura 5.10. Analiza în frecvență a extrapolatorului de ordinul zero.

5. SEMNALE ESANTIONATE

5.5 Reconstituirea semnalelor esantionate

Extrapolatorul de ordinul I

$$x_r(t) = x(kT) + \frac{x(kT) - x[(k-1)T]}{T}(t - kT)\ ,\ \ pentru\ \ t \in [kT,\ (k+1)T]$$



a) *b)*

Figura 5.11. Răspunsul extrapolatorului de ordinul I (a) şi funcția sa pondere (b).

5. SEMNALE ESANTIONATE

5.5 Reconstituirea semnalelor esantionate

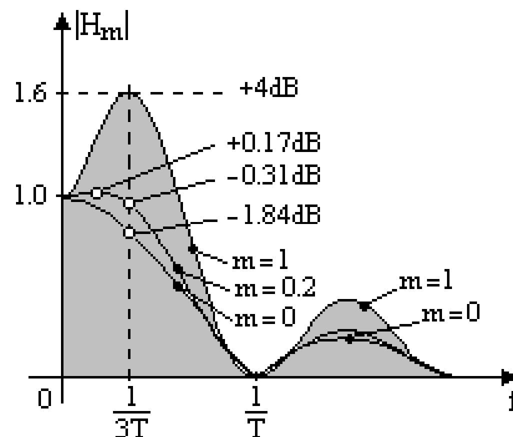


Figura 5.12. Caracteristici de frecvență.ale extrapolatoarelor de ordin cuprins intre o si 1

5. SEMNALE ESANTIONATE

5.5 Reconstituirea semnalelor esantionate

Filtrarea combinata

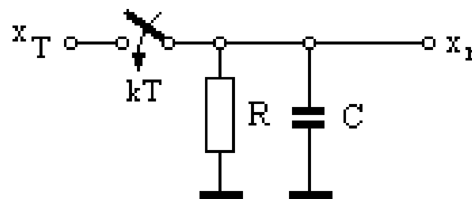
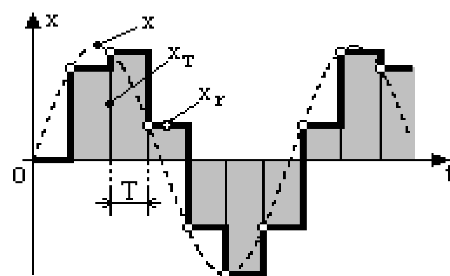


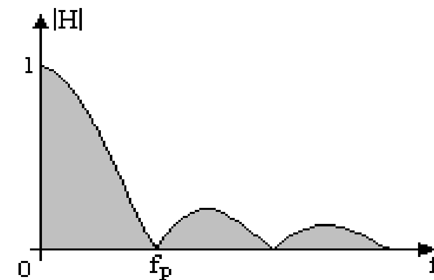
Figura 5.13. Filtru RC trece-jos.

5. SEMNALE ESANTIONATE

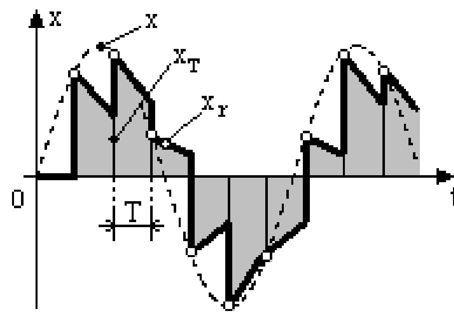
5.5 Reconstituirea semnalelor esantionate

τ>>T





τ=2T



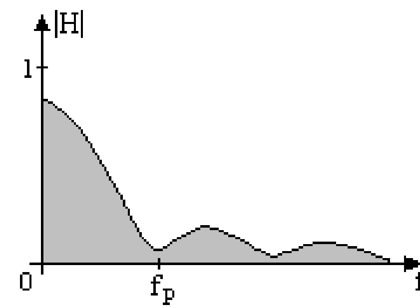


Figura 5.14-15. Comportarea filtrului din figura 5.13

5. SEMNALE ESANTIONATE

5.5 Reconstituirea semnalelor esantionate

τ=0.5T

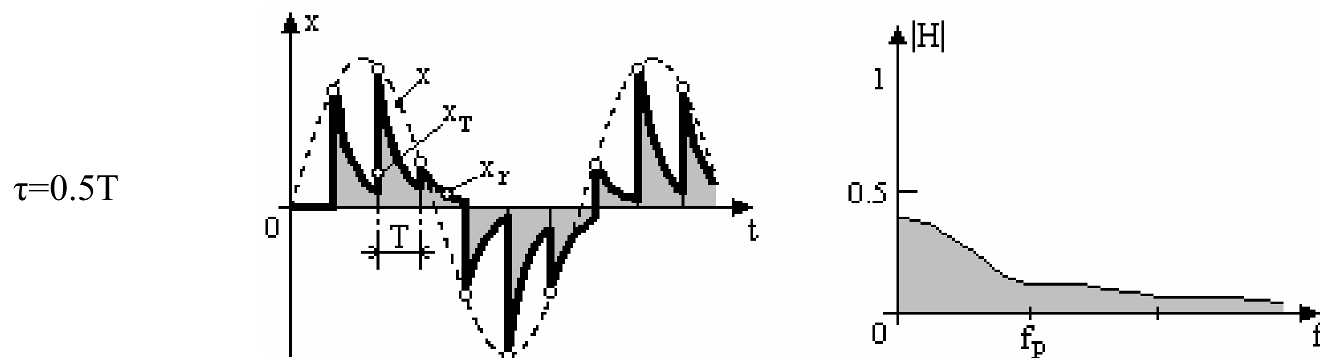


Figura 5.16. Comportarea filtrului din figura 5.13

SCS I : Teoria semnalelor

Capitolul 1. **Introducere**

Capitolul 2. **O privire generală**

Capitolul 3. **Semnale periodice**

Capitolul 4. **Semnale aperiodice**

Capitolul 5. **Semnale eşantionate**

Capitolul 6. ***Semnale modulate***

6. SEMNALE MODULATE

6.1 Consideratii generale

6.2 Modulatia in amplitudine cu purtatoare armonica

6.3 Procedee speciale de modulatie in amplitudine

6.4 Semnale modulate in faza si frecventa

6.5 Efectul perturbatiilor asupra semnalelor modulate

6. SEMNALE MODULATE

6.1 Consideratii generale

Modulatie = transpunerea informatiei continute in *semnalul modulator* asupra unui *semnal purtator => semnalul modulat*

Modulatie cu semnalul purtator:

- armonic;
- impulsuri.

6. SEMNALE MODULATE

6.1 Consideratii generale

Modulatie cu semnal purtator armonic:

- semnalul purtator $x_p(t) = X_p \cdot \cos(2\pi f_p t + \varphi_p)$
- semnalul modulat $x_M(t) = X(t) \cdot \cos\Phi(t) = X(t) \cdot \cos(2\pi f_p t + \varphi(t))$
- semnalul modulator $x_m(t)$

Modulatie in amplitudine MA $X(t) \sim x_m(t), \varphi(t) = \varphi_p = cst$

Modulatie in faza MP $X(t) = X_p = cst, \varphi(t) \sim x_m(t)$

Modulatie in frecventa MF $X(t) = X_p = cst, \dfrac{d\varphi(t)}{dt} \sim x_m(t)$

6. SEMNALE MODULATE

6.1 Consideratii generale

Modulatie cu semnal purtator armonic

$$x_M(t) = X(t) \cdot \cos\Phi(t) = X(t) \cdot \cos(2\pi f_p t + \varphi(t))$$

$$\Downarrow$$

$$fazor \quad \underline{x_M} = X(t) \cdot e^{j\varphi(t)}$$

$$x_M(t) = \mathrm{Re}\left\{\underline{x_M} \cdot e^{j2\pi f_p t}\right\}$$

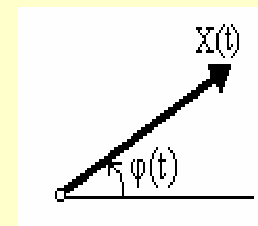


Figura 6.1. Reprezentarea fazorială a unui semnal modulat.

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

6. SEMNALE MODULATE

6.2 Modulatia in amplitudine cu purtatoare armonica

$$x_{MA}(t) = X_p[1 + m \cdot x_m(t)] \cdot \cos(2\pi f_p t + \varphi_p) = X_p[1 + g_m(t)] \cdot \cos(2\pi f_p t + \varphi_p)$$

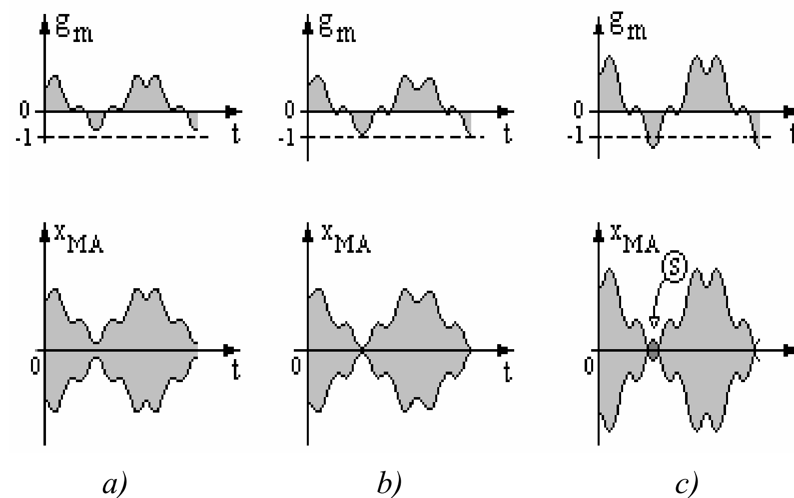
Daca $\min\{x_m(t)\} = -1 \Rightarrow$ **m = grad de modulatie**

Anvelope:

$$I_+ = X_p \left[1 + g_m(t)\right] = X_p \left[1 + m \; x_m(t)\right]$$

$$I_- = -X_p \left[1 + g_m(t)\right] = -X_p \left[1 + m \; x_m(t)\right]$$

Daca $\min\{g_m(t)\} < -1 \Rightarrow$ intrepatrunderea anvelopelor=supramodulatie (figura 6.2c)



a) b) c)

Figura 6.2. Funcția modulatoare controlează amplitudinea semnalului modulat.

6. SEMNALE MODULATE

6.2 Modulatia in amplitudine cu purtatoare armonica

Pt. modulatoare armonica: $x_{MA}(t) = X_p\left[1 + m\cos\left(2\pi f_m t + \varphi_m\right)\right]\cdot\cos\left(2\pi f_p t + \varphi_p\right)$

$$m = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{X_{\max} + X_{\min}}$$

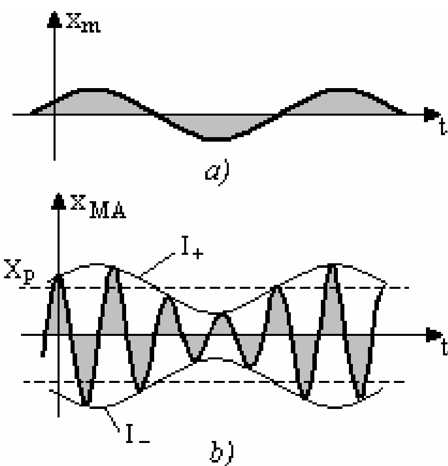


Figura 6.3. (a) – semnalul modulator armonic; (b) – SMA corespunzător.

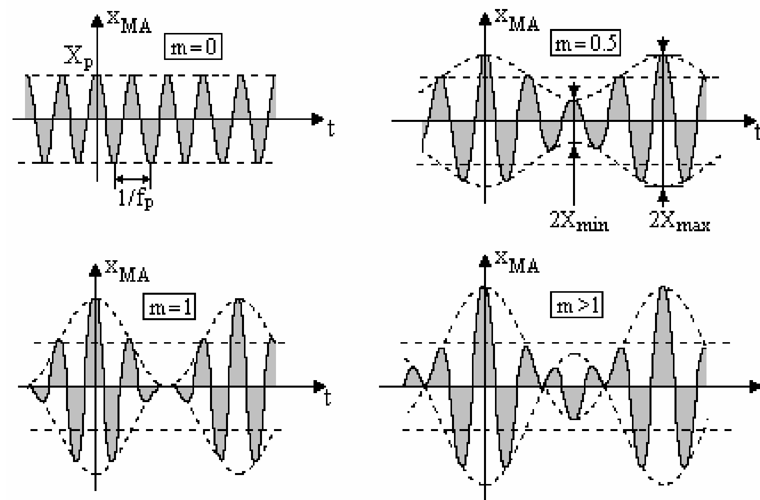


Figura 6.4. Semnale MA cu diferite grade de modulație.

6. SEMNALE MODULATE

6.2 Modulatia in amplitudine cu purtatoare armonica

pt. modulatoare armonica: $x_m(t) = \cos\left(2\pi f_m t + \varphi_m\right)$

$$x_{MA}(t) = X_p\left[1 + m\cos\left(2\pi f_m t + \varphi_m\right)\right]\cdot\cos\left(2\pi f_p t + \varphi_p\right) =$$
$$= X_p \cdot \cos\left(2\pi f_p t + \varphi_p\right) +$$
$$+\frac{m}{2}\cdot X_p \cdot \cos\left[2\pi(f_p + f_m)t + \varphi_p + \varphi_m\right] +$$
$$+\frac{m}{2}\cdot X_p \cdot \cos\left[2\pi(f_p - f_m)t + \varphi_p - \varphi_m\right]$$

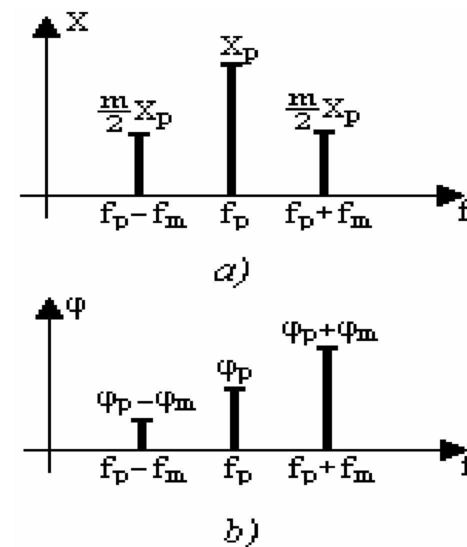


Figura 6.5. Spectrul unui SMA cu modulatoare armonică.

$$P_{MA} = P_p \cdot \left(1 + \frac{m^2}{2}\right) \qquad P_p \le P_{MA} \le 1.5 P_p$$

6. SEMNALE MODULATE

6.2 Modulatia in amplitudine cu purtatoare armonica

Pt. modulatoare armonica

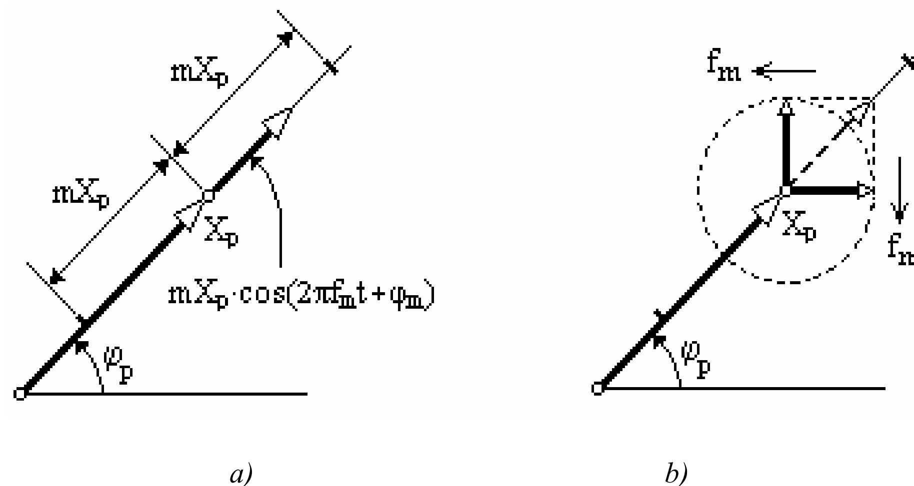


Figura 6.6. Reprezentări vectoriale.

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

6. SEMNALE MODULATE

6.2 Modulatia in amplitudine cu purtatoare armonica

pt. modulatoarea periodica sau cvasiperiodica: $x_m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k \cdot \cos(2\pi f_k t + \varphi_k)$

$$x_{MA}(t) = X_p \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} m_k \cdot \cos(2\pi f_k t + \varphi_k) \right] \cdot \cos(2\pi f_p t + \varphi_p)$$

$$P_{MA} = P_p \left(1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} m_k^2 \right)$$

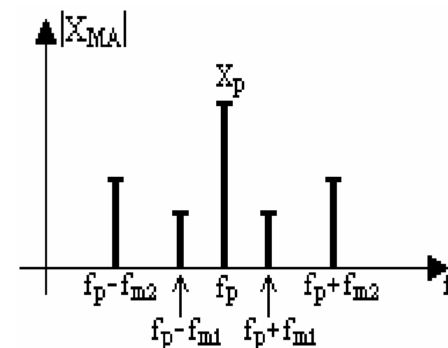


Figura 6.7. Spectrul SMA.

6. SEMNALE MODULATE

6.2 Modulatia in amplitudine cu purtatoare armonica

pt. modulatoare impuls:

$$x_{MA}(t) = X_p \cdot \cos(2\pi f_p t + \varphi_p) +$$

$$+\frac{m}{2} \cdot X_p \cdot e^{j\varphi_p} \left[x_m(t) \cdot e^{j2\pi f_p t} \right] + \frac{m}{2} \cdot X_p \cdot e^{-j\varphi_p} \left[x_m(t) \cdot e^{-j2\pi f_p t} \right]$$

$$\Downarrow$$

$$X_{MA}(f) = \frac{1}{2} X_p \left[e^{j\varphi_p} \cdot \delta(f - f_p) + e^{-j\varphi_p} \cdot \delta(f + f_p) \right] +$$

$$+\frac{m}{2} \cdot X_p \cdot e^{j\varphi_p} \cdot X_m(f - f_p) + \frac{m}{2} \cdot X_p \cdot e^{-j\varphi_p} \cdot X_m(f + f_p)$$

6. SEMNALE MODULATE

6.2 Modulatia in amplitudine cu purtatoare armonica

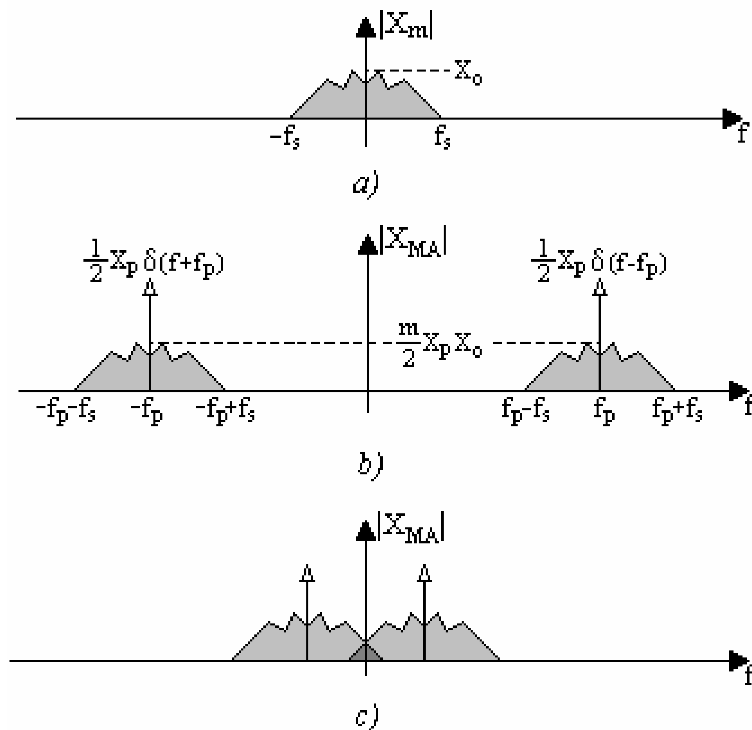


Figura 6.8. Spectrul SMA cu modulatoare impuls.

$$f_p - f_s > 0 \Rightarrow f_p > f_s$$

6. SEMNALE MODULATE

6.2 Modulatia in amplitudine cu purtatoare armonica

Demodularea semnalelor MA = Detectie de anvelopa
Detector de anvelopa = redresor + filtru trece-jos

Redresare dubla-alternanta

$$x_{r2}(t)=\frac{2}{\pi}X_p+\frac{2}{\pi}mX_px_m(t)+$$
$$+\frac{4}{3\pi}X_p\left[1+mx_m(t)\right]\cos\left(2\pi\cdot 2f_pt+2\varphi_p\right)-$$
$$-\frac{4}{15\pi}X_p\left[1+mx_m(t)\right]\cos\left(2\pi\cdot 4f_pt+4\varphi_p\right)+\dots$$

Redresare mono-alternanta

$$x_{r1}(t)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\cos(2\pi f_pt+\varphi_p)+\frac{2}{3\pi}\cos(2\pi\cdot 2f_pt+2\varphi_p)-$$
$$-\frac{2}{15\pi}\cos(2\pi\cdot 4f_pt+4\varphi_p)+\dots$$

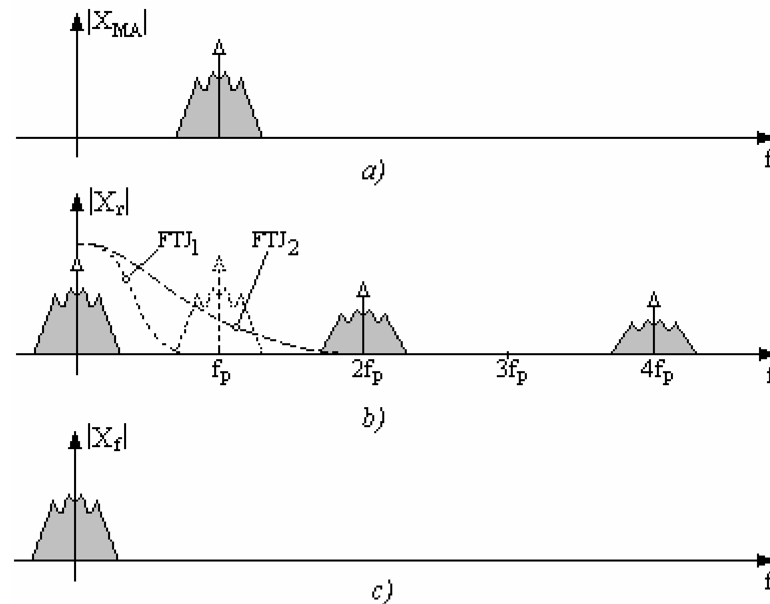


Figura 6.9. Demodularea semnalului MA – spectre.

6. SEMNALE MODULATE

6.2 Modulatia in amplitudine cu purtatoare armonica

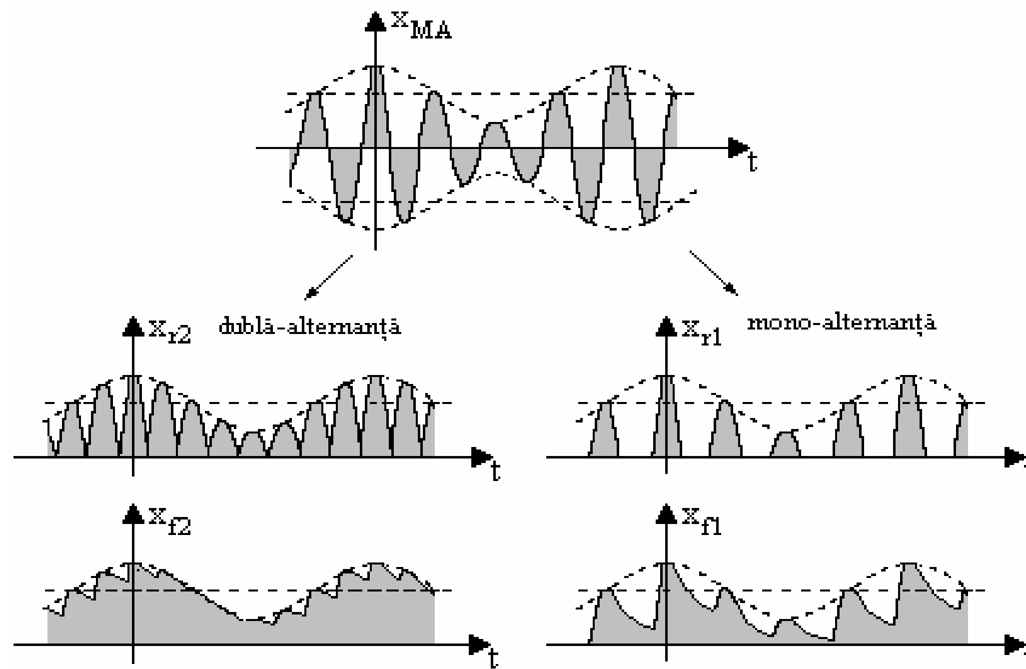


Figura 6.10. Demodularea semnalelor MA – domeniul timp.

6. SEMNALE MODULATE

6.3 Procedee speciale de modulatie in amplitudine

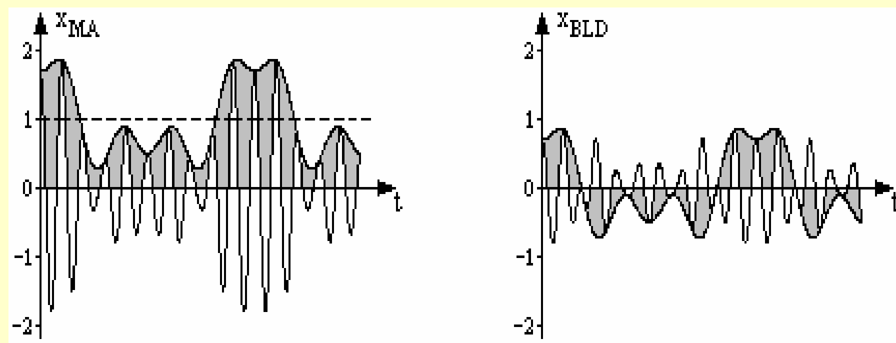
- modulatie cu banda laterala dubla – BLD
- modulatie cu banda laterala unica – BLU
- modulatie cu rest de bandă laterală – RBL
- dubla modulatie in amplitudine – DMA
- modulația polară – MPO
- dubla modulație în cuadratură - DMC

6. SEMNALE MODULATE

6.3 Procedee speciale de modulatie in amplitudine

BLD = banda laterala dubla (si purtatoare suprimata)

$$x_{BLD}(t) = m \cdot x_m(t) \cdot X_p \cos(2\pi f_p t + \varphi_p)$$



a) *b)*

Figura 6.11. Comparație între MA şi modulația BLD.

6. SEMNALE MODULATE

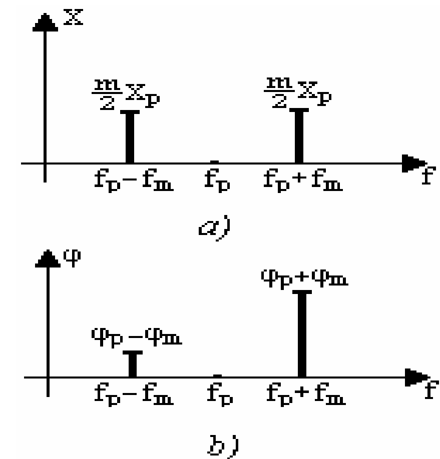
6.3 Procedee speciale de modulatie in amplitudine

BLD cu modulatoare armonica: $x_m(t) = \cos\left(2\pi f_m t + \varphi_m\right)$

$$x_{BLD}(t) = m\cos\left(2\pi f_m t + \varphi_m\right) X_p \cos\left(2\pi f_p t + \varphi_p\right) =$$

$$= \frac{m}{2} X_p \cos\left[2\pi(f_p + f_m)t + \varphi_p + \varphi_m\right] +$$

$$+ \frac{m}{2} X_p \cos\left[2\pi(f_p - f_m)t + \varphi_p - \varphi_m\right]$$



Spectrul unui BLD cu modulatoare armonică.

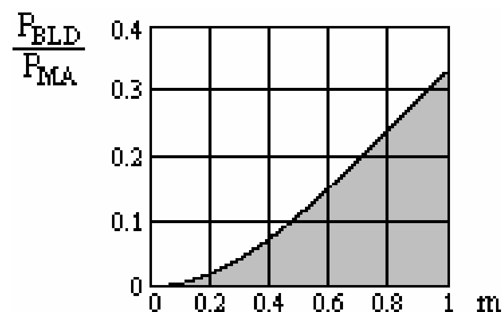


Figura 6.12. Reducerea de putere.

$$P_{BLD} = \frac{m^2}{2} P_p \Rightarrow \frac{P_{BLD}}{P_{MA}} = \frac{m^2}{2 + m^2}$$

$$B_{BLD} = 2B_m$$

6. SEMNALE MODULATE

6.3 Procedee speciale de modulatie in amplitudine

Demodularea BLD = detectie sincrona

Generare oscilatie locala:

$$x_{OL}(t) = \cos\ (2\pi f_{OL} t + \varphi_{OL})\ unde\ f_{OL} \simeq f_p, \varphi_{OL} \simeq \varphi_p$$

Modulatie de produs:

$$x_r(t) = x_{BLD}(t) \cdot x_{OL}(t) = mX_p x_m(t) \cdot \cos(2\pi f_p t + \varphi_p) \cdot \cos(2\pi f_{OL} t + \varphi_{OL})$$

$$Daca\ f_p - f_{OL} = \Delta f\ ;\ \varphi_p - \varphi_{OL} = \Delta\varphi\ ;\ f_p + f_{OL} \cong 2 f_p$$

$$atunci\ x_r(t) = \frac{m}{2} X_p x_m(t) \cdot \cos\ (2\pi\Delta f \cdot t + \Delta\varphi) + \frac{m}{2} X_p x_m(t) \cdot \cos\ (2\pi \cdot 2 f_p t + \varphi_p + \varphi_{OL})$$

Filtrare:

$$x_f(t) = \frac{m}{2} X_p x_m(t) \cdot \cos(2\pi\Delta f \cdot t + \Delta\varphi)$$

6. SEMNALE MODULATE

6.3 Procedee speciale de modulatie in amplitudine

$$x_f(t)=\frac{m}{2}X_p x_m(t)\cdot\cos(2\pi\Delta f\cdot t+\Delta\varphi)$$

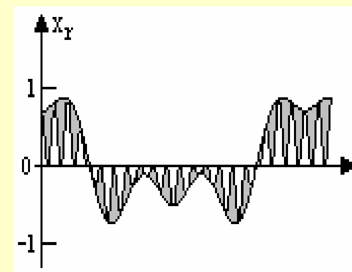


Figura 6.13. Detecția sincronă

Acord in faza si frecventa:

$$\Delta f=0,\ \Delta\varphi=0\Rightarrow x_f(t)=\frac{m}{2}X_p x_m(t)$$

Dezacord in faza

$$\Delta f=0,\ \Delta\varphi\neq 0\Rightarrow x_f(t)=\frac{m}{2}X_p x_m(t)\cdot\cos\Delta\varphi$$

$$!!\ \Delta\varphi=\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow x_f(t)=0$$

Dezacord in frecventa → batai

$$\Delta f\neq 0,\ \Delta\varphi=0\Rightarrow x_f(t)=\frac{m}{2}X_p x_m(t)\cdot\cos\left(2\pi\Delta f\cdot t\right)$$

6. SEMNALE MODULATE

6.3 Procedee speciale de modulatie in amplitudine

BLU = banda laterala unica
→ suprimarea purtatoarei si a unei benzi laterale

$$B_{BLU} = B_m$$

BLU cu modulatoare armonica: $x_m(t) = \cos\left(2\pi f_m t + \varphi_m\right)$

$$x_{BLU_s}(t) = \frac{m}{2} X_p \cos\left[2\pi(f_p + f_m)t + \varphi_p + \varphi_m\right]$$

$$x_{BLU_i}(t) = \frac{m}{2} X_p \cos\left[2\pi(f_p - f_m)t + \varphi_p - \varphi_m\right]$$

$$P_{BLU} = \frac{1}{2}\frac{m^2}{2} P_p = \frac{1}{2} P_{BLD}$$

6. SEMNALE MODULATE

6.3 Procedee speciale de modulatie in amplitudine

Demodularea BLU = detectie sincrona

Pentru $x_{BLU}(t)=\frac{m}{2}X_p\cos\left[2\pi(f_p+f_m)t+\varphi_p+\varphi_m\right]$

$$\Rightarrow \quad x_r(t)=x_{BLU}(t)\cdot x_{OL}(t)=$$

$$=\frac{m}{2}X_p\cos\left[2\pi(f_p+f_m)t+\varphi_p+\varphi_m\right]\cdot\cos\left(2\pi f_{OL}t+\varphi_{OL}\right)=$$

$$=\frac{m}{4}X_p\cos\left[2\pi(f_m+\Delta f)t+\varphi_m+\Delta\varphi\right]+$$

$$+\frac{m}{4}X_p\cos\left[2\pi(2\ \ f_p+f_m)t+\varphi_p+\varphi_{OL}+\varphi_m\right]$$

$$x_f(t)=\frac{m}{4}X_p\cos\left[\ 2\pi(f_m+\Delta f)t+\varphi_m+\Delta\varphi\right]$$

6. SEMNALE MODULATE

6.3 Procedee speciale de modulatie in amplitudine

$$x_f(t) = \frac{m}{4} X_p \cos\left[2\pi(f_m + \Delta f)t + \varphi_m + \Delta\varphi\right]$$

Acord in faza si frecventa:

$$\Delta f = 0, \Delta\varphi = 0 \Rightarrow x_f(t) = \frac{m}{4} X_p \cos\left(2\pi f_m t + \varphi_m\right)$$

Dezacord in faza

$$\Delta f = 0, \Delta\varphi \neq 0 \Rightarrow x_f(t) = \frac{m}{2} X_p \cdot \cos\left(2\pi f_m t + \varphi_m + \Delta\varphi\right)$$

Dezacord in frecventa

$$\Delta f \neq 0, \Delta\varphi = 0 \Rightarrow x_f(t) = \frac{m}{2} X_p \cdot \cos\left[2\pi\left(f_m + \Delta f\right)t + \varphi_m\right]$$

SCS I : Teoria semnalelor

Capitolul 1. **Introducere**

Capitolul 2. **O privire generală**

Capitolul 3. **Semnale periodice**

Capitolul 4. **Semnale aperiodice**

Capitolul 5. **Semnale eşantionate**

Capitolul 6. ***Semnale modulate***

6. SEMNALE MODULATE

6.1 Consideratii generale

6.2 Modulatia in amplitudine cu purtatoare armonica

6.3 Procedee speciale de modulatie in amplitudine

6.4 Semnale modulate in faza si frecventa

6.5 Efectul perturbatiilor asupra semnalelor modulate

6. SEMNALE MODULATE

6.1 Consideratii generale

Modulatie cu semnal purtator armonic:

- semnalul purtator $x_p(t) = X_p \cdot \cos(2\pi f_p t + \varphi_p)$
- semnalul modulat $x_M(t) = X(t) \cdot \cos\Phi(t) = X(t) \cdot \cos(2\pi f_p t + \varphi(t))$
- semnalul modulator $x_m(t)$

Modulatie in amplitudine MA $X(t) \sim x_m(t), \varphi(t) = \varphi_p = cst$

Modulatie in faza MP $X(t) = X_p = cst, \varphi(t) \sim x_m(t)$

Modulatie in frecventa MF $X(t) = X_p = cst, \dfrac{d\varphi(t)}{dt} \sim x_m(t)$

6. SEMNALE MODULATE

6.2 Modulatia in amplitudine cu purtatoare armonica

$$x_{MA}(t) = X_p[1 + m \cdot x_m(t)] \cdot \cos(2\pi f_p t + \varphi_p) = X_p[1 + g_m(t)] \cdot \cos(2\pi f_p t + \varphi_p)$$

Daca $\min\{x_m(t)\} = -1 \Rightarrow$ **m = grad de modulatie**

Anvelope:

$$I_+ = X_p \ [1 + g_m(t)] = X_p \ [1 + m \ x_m(t)]$$

$$I_- = -X_p \ [1 + g_m(t)] = -X_p \ [1 + m \ x_m(t)]$$

Daca $\min\{g_m(t)\} < -1 \Rightarrow$ intrepatrunderea anvelopelor=supramodulatie (figura 6.2c)

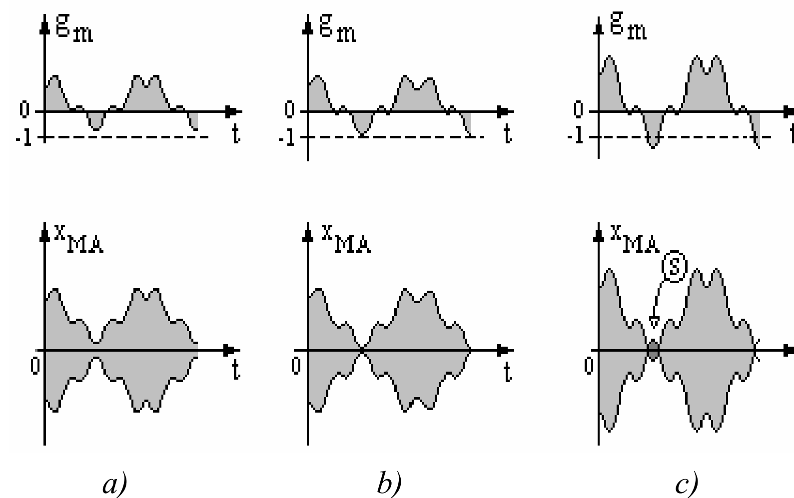


Figura 6.2. Funcția modulatoare controlează amplitudinea semnalului modulat.

6. SEMNALE MODULATE

6.3 Procedee speciale de modulatie in amplitudine

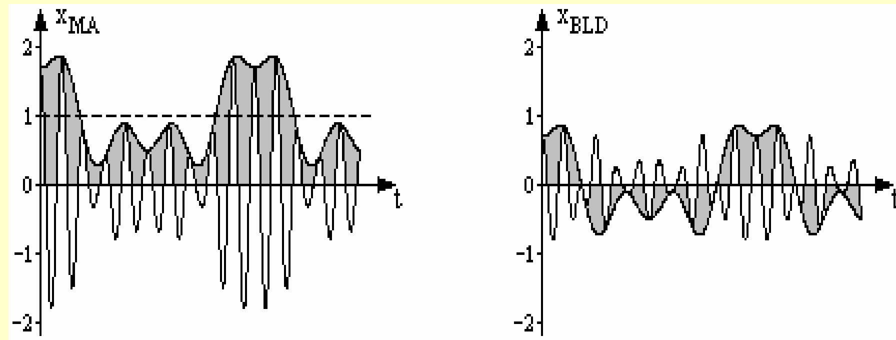
- modulatie cu banda laterala dubla – BLD
- modulatie cu banda laterala unica – BLU
- modulatie cu rest de bandă laterală – RBL
- dubla modulatie in amplitudine – DMA
- modulația polară – MPO
- dubla modulație în cuadratură - DMC

6. SEMNALE MODULATE

6.3 Procedee speciale de modulatie in amplitudine

BLD = banda laterala dubla (si purtatoare suprimata)

$$x_{BLD}(t) = m \cdot x_m(t) \cdot X_p \cos(2\pi f_p t + \varphi_p)$$



a) *b)*

Figura 6.11. Comparație între MA şi modulația BLD.

6. SEMNALE MODULATE

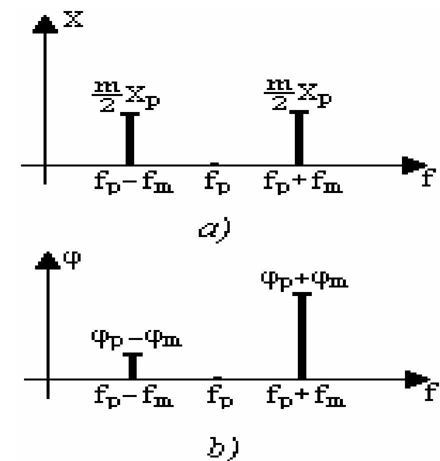
6.3 Procedee speciale de modulatie in amplitudine

BLD cu modulatoare armonica: $x_m(t) = \cos\left(2\pi f_m t + \varphi_m\right)$

$$x_{BLD}(t) = m\cos\left(2\pi f_m t + \varphi_m\right) X_p \cos\left(2\pi f_p t + \varphi_p\right) =$$

$$= \frac{m}{2} X_p \cos\left[2\pi(f_p + f_m)t + \varphi_p + \varphi_m\right] +$$

$$+ \frac{m}{2} X_p \cos\left[2\pi(f_p - f_m)t + \varphi_p - \varphi_m\right]$$



Spectrul unui BLD cu modulatoare armonică.

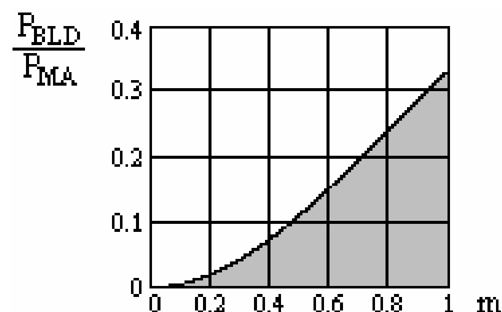


Figura 6.12. Reducerea de putere.

$$P_{BLD} = \frac{m^2}{2} P_p \Rightarrow \frac{P_{BLD}}{P_{MA}} = \frac{m^2}{2 + m^2}$$

$$B_{BLD} = 2B_m$$

6. SEMNALE MODULATE

6.3 Procedee speciale de modulatie in amplitudine

Demodularea BLD = detectie sincrona

Generare oscilatie locala:

$$x_{OL}(t) = \cos\ (2\pi f_{OL} t + \varphi_{OL})\ unde\ f_{OL} \simeq f_p, \varphi_{OL} \simeq \varphi_p$$

Modulatie de produs:

$$x_r(t) = x_{BLD}(t) \cdot x_{OL}(t) = mX_p x_m(t) \cdot \cos(2\pi f_p t + \varphi_p) \cdot \cos(2\pi f_{OL} t + \varphi_{OL})$$

$$Daca\ f_p - f_{OL} = \Delta f\ ;\ \varphi_p - \varphi_{OL} = \Delta\varphi\ ;\ f_p + f_{OL} \cong 2 f_p$$

$$atunci\ x_r(t) = \frac{m}{2} X_p x_m(t) \cdot \cos\ (2\pi\Delta f \cdot t + \Delta\varphi) + \frac{m}{2} X_p x_m(t) \cdot \cos\ (2\pi \cdot 2 f_p t + \varphi_p + \varphi_{OL})$$

Filtrare:

$$x_f(t) = \frac{m}{2} X_p x_m(t) \cdot \cos(2\pi\Delta f \cdot t + \Delta\varphi)$$

6. SEMNALE MODULATE

6.3 Procedee speciale de modulatie in amplitudine

$$x_f(t) = \frac{m}{2} X_p x_m(t) \cdot \cos(2\pi\Delta f \cdot t + \Delta\varphi)$$

Acord in faza si frecventa:

$$\Delta f = 0, \Delta\varphi = 0 \Rightarrow x_f(t) = \frac{m}{2} X_p x_m(t)$$

Dezacord in faza

$$\Delta f = 0, \Delta\varphi \neq 0 \Rightarrow x_f(t) = \frac{m}{2} X_p x_m(t) \cdot \cos\Delta\varphi$$

$$!!\ \Delta\varphi = \frac{\pi}{2} \ \Rightarrow x_f(t) = 0$$

Dezacord in frecventa → batai

$$\Delta f \neq 0, \Delta\varphi = 0 \Rightarrow x_f(t) = \frac{m}{2} X_p x_m(t) \cdot \cos\left(2\pi\Delta f \cdot t\right)$$

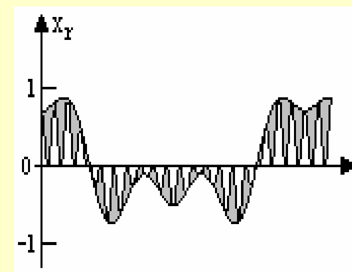


Figura 6.13. Detecția sincronă

6. SEMNALE MODULATE

6.3 Procedee speciale de modulatie in amplitudine

BLU = banda laterala unica
→ suprimarea purtatoarei si a unei benzi laterale

$$B_{BLU} = B_m$$

BLU cu modulatoare armonica: $x_m(t) = \cos\left(2\pi f_m t + \varphi_m\right)$

$$x_{BLU_s}(t) = \frac{m}{2} X_p \cos\left[2\pi(f_p + f_m)t + \varphi_p + \varphi_m\right]$$

$$x_{BLU_i}(t) = \frac{m}{2} X_p \cos\left[2\pi(f_p - f_m)t + \varphi_p - \varphi_m\right]$$

$$P_{BLU} = \frac{1}{2}\frac{m^2}{2} P_p = \frac{1}{2} P_{BLD}$$

6. SEMNALE MODULATE

6.3 Procedee speciale de modulatie in amplitudine

Demodularea BLU = detectie sincrona

Pentru $x_{BLU}(t)=\frac{m}{2}X_p\cos\left[2\pi(f_p+f_m)t+\varphi_p+\varphi_m\right]$

$$\Rightarrow \quad x_r(t)=x_{BLU}(t)\cdot x_{OL}(t)=$$

$$=\frac{m}{2}X_p\cos\left[2\pi(f_p+f_m)t+\varphi_p+\varphi_m\right]\cdot\cos\left(2\pi f_{OL}t+\varphi_{OL}\right)=$$

$$=\frac{m}{4}X_p\cos\left[2\pi(f_m+\Delta f)t+\varphi_m+\Delta\varphi\right]+$$

$$+\frac{m}{4}X_p\cos\left[2\pi(2\ \ f_p+f_m)t+\varphi_p+\varphi_{OL}+\varphi_m\right]$$

$$x_f(t)=\frac{m}{4}X_p\cos\left[\ 2\pi(f_m+\Delta f)t+\varphi_m+\Delta\varphi\right]$$

6. SEMNALE MODULATE

6.3 Procedee speciale de modulatie in amplitudine

$$x_f(t) = \frac{m}{4} X_p \cos\left[2\pi(f_m + \Delta f)t + \varphi_m + \Delta\varphi\right]$$

Acord in faza si frecventa:

$$\Delta f = 0, \Delta\varphi = 0 \Rightarrow x_f(t) = \frac{m}{4} X_p \cos\left(2\pi f_m t + \varphi_m\right)$$

Dezacord in faza

$$\Delta f = 0, \Delta\varphi \neq 0 \Rightarrow x_f(t) = \frac{m}{2} X_p \cdot \cos\left(2\pi f_m t + \varphi_m + \Delta\varphi\right)$$

Dezacord in frecventa

$$\Delta f \neq 0, \Delta\varphi = 0 \Rightarrow x_f(t) = \frac{m}{2} X_p \cdot \cos\left[2\pi\left(f_m + \Delta f\right)t + \varphi_m\right]$$

6. SEMNALE MODULATE

6.3 Procedee speciale de modulatie in amplitudine

RBL = rest de bandă laterală
→ suprimarea parțială a unei benzi laterale

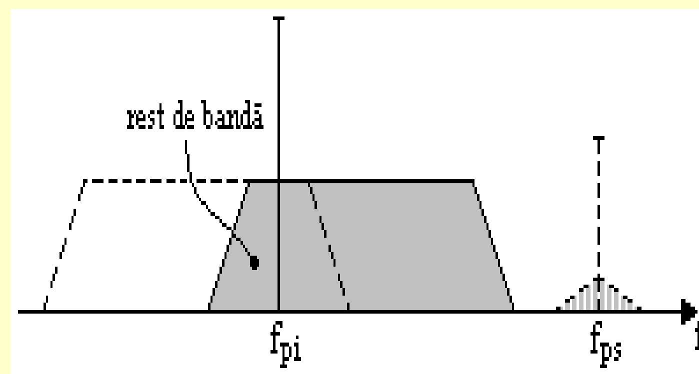


Figura 6.17. Spectrul semnalului RBL

6. SEMNALE MODULATE

6.3 Procedee speciale de modulatie in amplitudine

DMA = dubla modulatie de amplitudine

$$x_{DMA}(t) = X_p \left\{1 + \left[1 + m \cdot x_m(t)\right] \cdot \cos(2\pi f_{sp} t + \varphi_{sp})\right\} \cdot \cos(2\pi f_p t)$$

$$B_{DMA} = 2\left(f_{sp} + B_m\right)$$

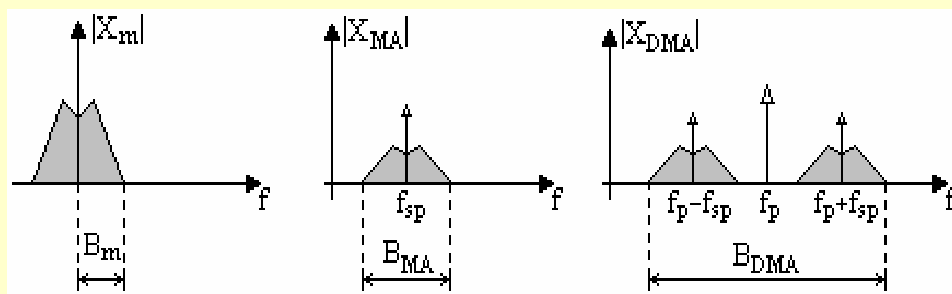


Figura 6.18. Spectrul semnalului DMA.

6. SEMNALE MODULATE

6.3 Procedee speciale de modulatie in amplitudine

MPO = modulatie polara

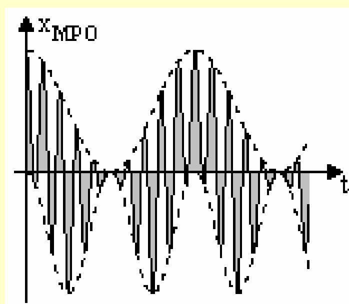
$$x_{MPO}(t) = \left[x_{m1}(t) + x_{m2}(t)\right] + \left[\ 2 + x_{m1}(t) - x_{m2}(t)\right] \cdot \cos(2\pi f_{sp} t)$$

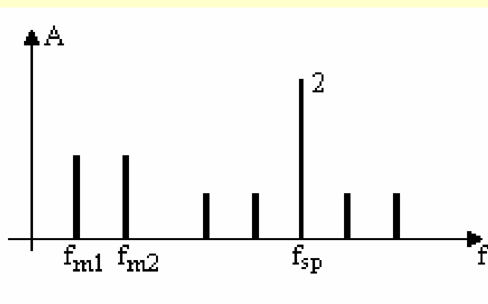
anvelope

$$I_+ = 2\ \left[\ 1 + x_{m1}(t)\right]$$

$$I_- = -2\ \left[\ 1 + x_{m2}(t)\right]$$

$$B_{MPO} = f_{sp} + \max\ \ (B_{m1}, B_{m2})$$





a) *b)*

Figura 6.19. Semnal modulat polar (a) şi spectrul său (b).

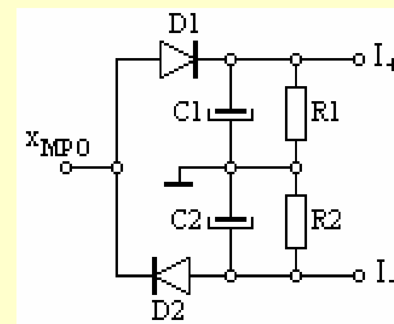


Figura 6.20. Demodularea semnalului MPO.

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

6. SEMNALE MODULATE

6.3 Procedee speciale de modulatie in amplitudine

Semnalul stereo-multiplex SSM

$$x_{SM}(t) = M(t) + S(t)\cdot\cos\left(2\pi f_{sp} t\right) + P\cdot\cos\left(2\pi \frac{f_{sp}}{2} t\right)$$

unde: $M(t) = \frac{1}{2}\cdot\left[L(t) + R(t)\right]; S(t) = \frac{1}{2}\cdot\left[L(t) - R(t)\right]$

L(t) = semnalul audio canal stang;*R(t)* = semnalul audio canal drept

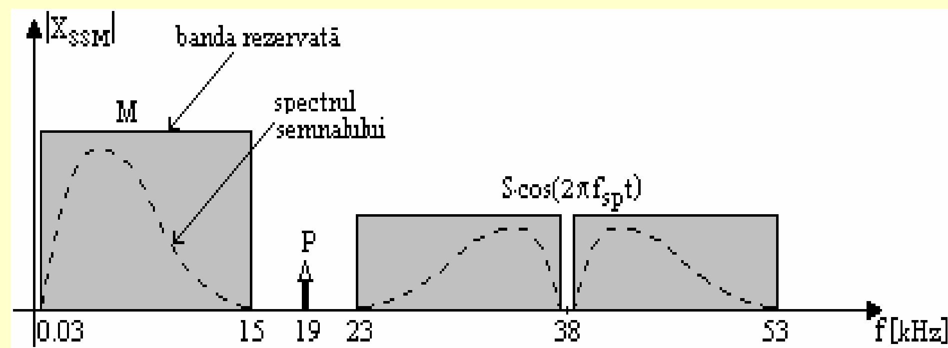


Fig.6.21. Benzile rezervate componentelor SSM.

6. SEMNALE MODULATE

6.3 Procedee speciale de modulatie in amplitudine

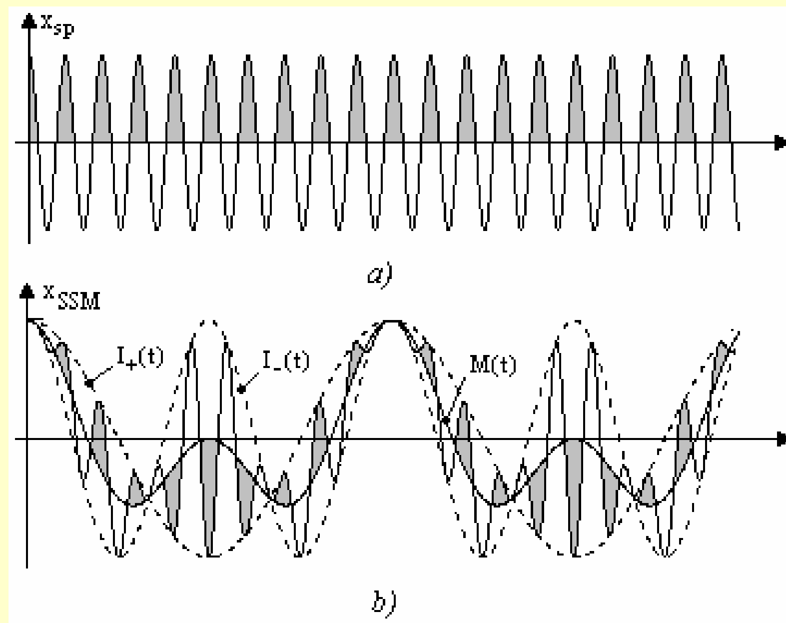


Figura 6.22. Exemplu de semnal stereo-multiplex.

6. SEMNALE MODULATE

6.3 Procedee speciale de modulatie in amplitudine

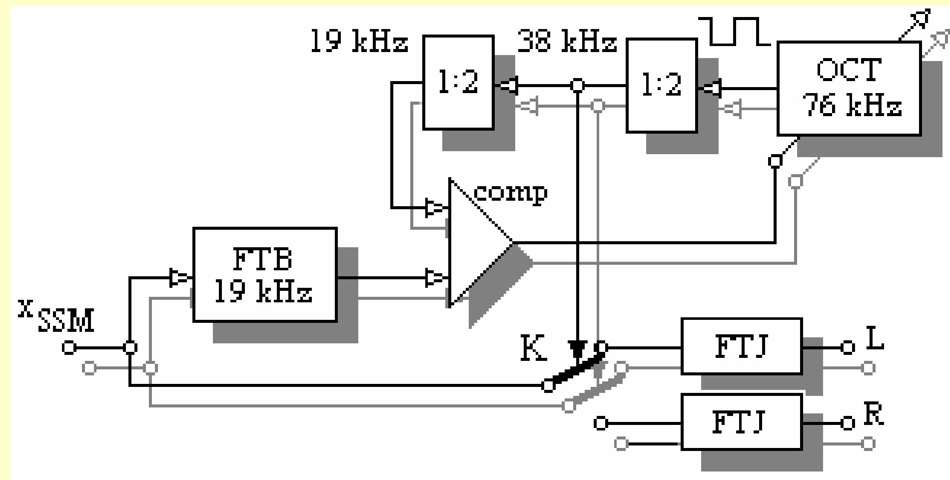


Figura 6.23. Schema de principiu a decodorului stereo.

6. SEMNALE MODULATE

6.3 Procedee speciale de modulatie in amplitudine

DMC = dubla modulație în cuadratură

MA: $x_{DMC}(t) = X_p\left[1 + m_1 x_{m1}(t)\right] \cdot \cos(2\pi f_{sp} t) + X_p\left[1 + m_2 x_{m2}(t)\right] \cdot \sin(2\pi f_{sp} t)$

BLD: $x_{DMC}(t) = m_1 X_p x_{m1}(t) \cdot \cos(2\pi f_{sp} t) + m_2 X_p x_{m2}(t) \cdot \sin(2\pi f_{sp} t)$

$$B_{DMC} = 2\max(B_{m1}, B_{m2})$$

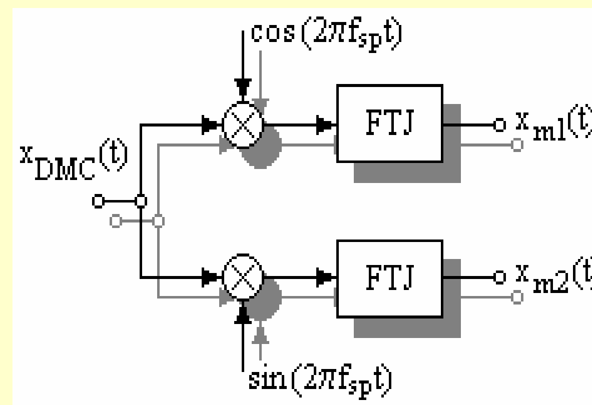


Figura 6.24. Demodularea semnalului DMC.

6. SEMNALE MODULATE

6.3 Procedee speciale de modulatie in amplitudine

Semnalul video – color complex (*CVBS*)

$$X_{CVBS}(t) = X_L(t) + X_C(t) + S_{HVC}(t)$$

unde:

$X_L(t) = 0.30 \cdot X_R(t) + 0.59 \cdot X_G(t) + 0.11 \cdot X_B(t)$ - luminanta

$X_C(t) = 0.493 \cdot [X_B(t) - X_L(t)] \cdot \cos(2\pi f_{sp} t) \pm$
$\pm 0.887 \cdot [X_R(t) - X_L(t)] \cdot \sin(2\pi f_{sp} t)$ - crominanta

X_R - roşu
X_G - verde
X_B – albastru
S_{HVC} - semnale de sincronizare pe orizontală, pe verticală şi de culoare.

6. SEMNALE MODULATE

6.4 Semnale modulate in faza si frecventa

Modulatie in faza MP

$$\varphi(t) = \varphi_p + g_m(t) \Rightarrow \boxed{x_{MP}(t) = X_p \cos\left(2\pi f_p t + \varphi_p + g_m(t)\right)}$$

Daca

$$x_m(t) = X_m \cos\left(2\pi f_m t + \varphi_m\right)$$

atunci

$$g_m(t) = \Delta\varphi \cdot \cos\left(2\pi f_m t + \varphi_m\right)$$

$$x_{MP}(t) = X_p \cos\left[2\pi f_p t + \varphi_p + \Delta\varphi \cdot \cos\left(2\pi f_m t + \varphi_m\right)\right]$$

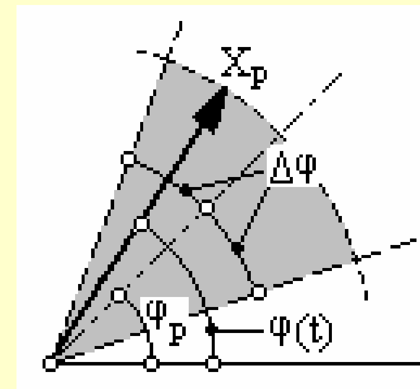


Figura 6.25. Diagrama fazorială.

6. SEMNALE MODULATE

6.4 Semnale modulate in faza si frecventa

Modulatie in frecventa MF

$$f(t) = f_p + g_m(t)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\Phi\ (t)}{dt} \Rightarrow \Phi(t) = 2\pi f_p \cdot t + \varphi_p + 2\pi \int g_m(t)dt$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{MF}(t) = X_p \cdot \cos\left(2\pi f_p t + \varphi_p + 2\pi \int g_m(t)dt\right)}$$

!!! Semnalul modulat în **frecvență** cu funcția *gm(t)* este echivalent cu semnalul modulat în **fază** cu integrala funcției *gm(t)*.

6. SEMNALE MODULATE

6.4 Semnale modulate in faza si frecventa

Daca

$$g_m(t) = \Delta f \cdot \cos(2\pi f_m t + \varphi_m)$$

atunci

$$x_{MF}(t) = X_p \cdot \cos\left[2\pi f_p t + \varphi_p + \frac{\Delta f}{f_m} \cdot \sin(2\pi f_m t + \varphi_m)\right]$$

$\beta = \frac{\Delta f}{f_m}$ **= indice de modulație**

$$x_{MF}(t) = X_p \cdot \cos\left[2\pi f_p t + \varphi_p + \beta \cdot \sin(2\pi f_m t + \varphi_m)\right]$$

6. SEMNALE MODULATE

6.4 Semnale modulate in faza si frecventa

$$x_{MF}(t) = X_p \cdot \cos\left[2\pi f_p t + \varphi_p + \beta \cdot \sin(2\pi f_m t + \varphi_m)\right] =$$

$$= X_p \cos\alpha_p \cos(\beta \sin\alpha_m) - X_p \sin\alpha_p \sin(\beta \sin\alpha_m)$$

$$unde : \alpha_p = 2\pi f_p t + \varphi_p ; \alpha_m = 2\pi f_m t + \varphi_m$$

$$Daca \begin{cases} \cos(\beta \ \sin\alpha_m) = J_0(\beta) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(\beta) \cdot \cos(2k\alpha_m) \\ \sin(\beta \ \sin\alpha_m) = 2\sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(\beta) \cdot \sin[(2k+1)\alpha_m] \ , \\ (-1)^i J_i(\beta) = J_{-i}(\beta) \end{cases}$$

$$atunci \quad x_{MF}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_p J_n(\beta) \cdot \cos\left(2\pi\left(f_p + nf_m\right)t + \varphi_p + n\varphi_m\right)$$

6. SEMNALE MODULATE

6.4 Semnale modulate in faza si frecventa

$$x_{MF}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X_pJ_n(\beta)\cos\left(2\pi\left(f_p+nf_m\right)t+\varphi_p+n\varphi_m\right)$$

$$P_{MF}=P_{MP}=P_p=\frac{1}{2}X_p^2$$

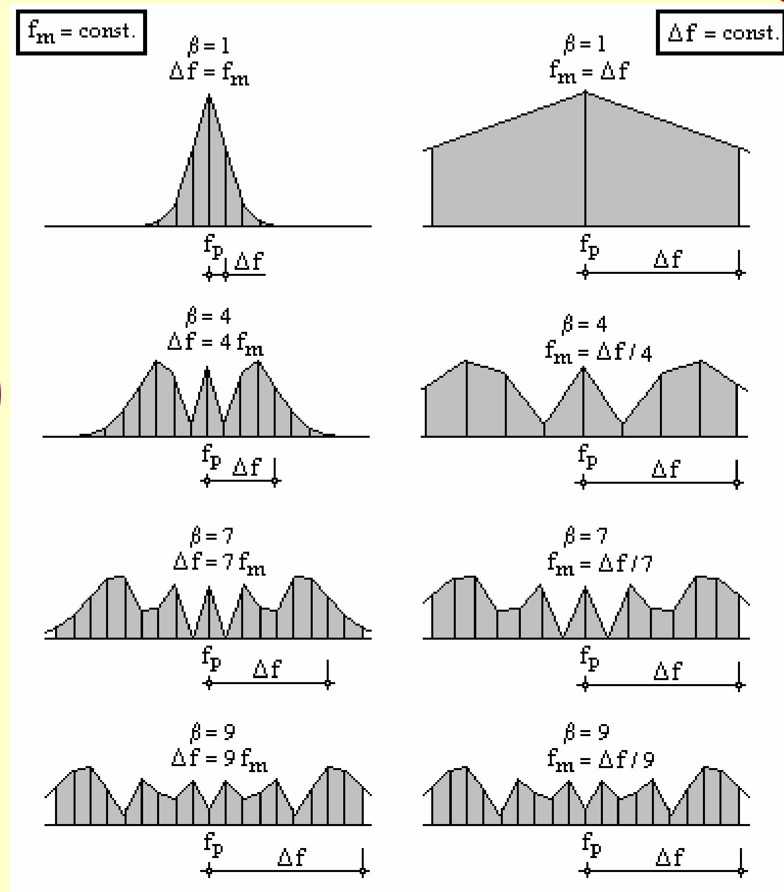


Figura 6.29. Spectrul semnalului MF.

6. SEMNALE MODULATE

6.4 Semnale modulate in faza si frecventa

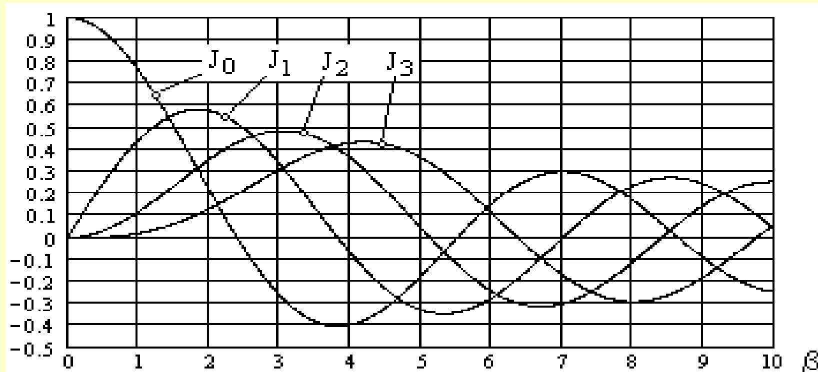


Figura 6.27. Funcții Bessel de speța I-a.

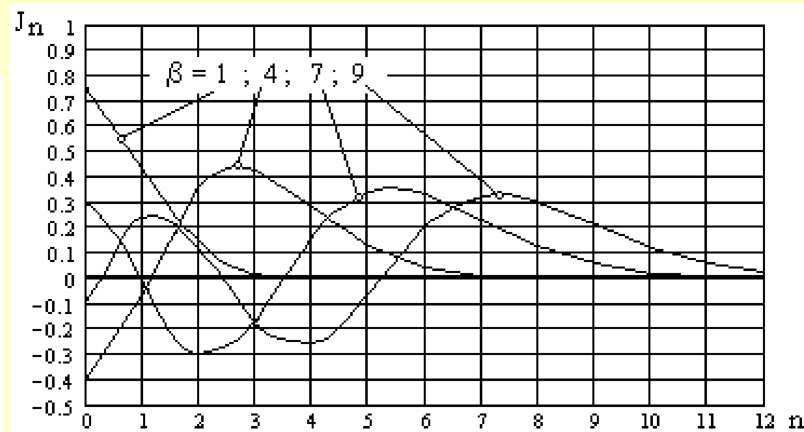


Figura 6.28. Funcții Bessel în funcție de indicele lor (n), având indicele de modulație β ca parametru.

6. SEMNALE MODULATE

6.4 Semnale modulate in faza si frecventa

SMF de banda ingusta - β<0.4

Daca $\beta < 0.4$

atunci $J_0(\beta) \cong 1$; $J_{\pm 1}(\beta) \cong \pm\dfrac{\beta}{2}$; $J_n(\beta) \cong 0$, *pentru* $n \geq 2$

si $$x_{MF}(t) = X_p \cos(2\pi f_p t + \varphi_p) + \frac{\beta}{2}\cdot X_p \cdot \cos\left[2\pi(f_p + f_m)t + \varphi_p + \varphi_m\right] - \frac{\beta}{2}\cdot X_p \cdot \cos\left[2\pi(f_p - f_m)t + \varphi_p - \varphi_m\right]$$

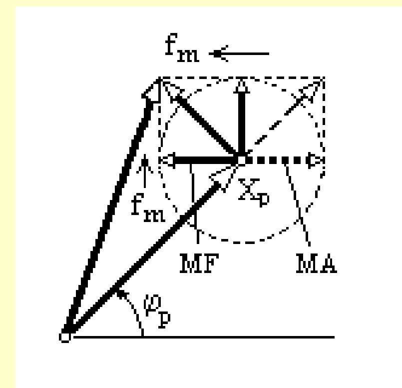


Figura 6.30. Diagramă fazorială.

6. SEMNALE MODULATE

6.4 Semnale modulate in faza si frecventa

SMF de banda larga -β > 0.4

$$B_{MF} = 2N\, f_m = 2(1+\beta)\, f_m$$

$$B_{MF} = 2\left(1+\beta+\sqrt{\beta}\right) f_m - relatia\ lui\ Manaev$$

$$B_{MF} = 2(f_{m\max} + \Delta f) = 2B_m + 2\Delta f - relatia\ lui\ Carson$$

SCS I : Teoria semnalelor

Capitolul 1. **Introducere**

Capitolul 2. **O privire generală**

Capitolul 3. **Semnale periodice**

Capitolul 4. **Semnale aperiodice**

Capitolul 5. **Semnale eşantionate**

Capitolul 6. ***Semnale modulate***

6. SEMNALE MODULATE

6.1 Consideratii generale

6.2 Modulatia in amplitudine cu purtatoare armonica

6.3 Procedee speciale de modulatie in amplitudine

6.4 Semnale modulate in faza si frecventa

6.5 Efectul perturbatiilor asupra semnalelor modulate

6. SEMNALE MODULATE

6.1 Consideratii generale

Modulatie cu semnal purtator armonic:

- semnalul purtator $x_p(t) = X_p \cdot \cos(2\pi f_p t + \varphi_p)$
- semnalul modulat $x_M(t) = X(t) \cdot \cos\Phi(t) = X(t) \cdot \cos(2\pi f_p t + \varphi(t))$
- semnalul modulator $x_m(t)$

Modulatie in amplitudine MA $X(t) \sim x_m(t), \varphi(t) = \varphi_p = cst$

Modulatie in faza MP $X(t) = X_p = cst, \varphi(t) \sim x_m(t)$

Modulatie in frecventa MF $X(t) = X_p = cst, \dfrac{d\varphi(t)}{dt} \sim x_m(t)$

6. SEMNALE MODULATE

6.4 Semnale modulate in faza si frecventa

6.4.1 Semnale modulate in faza (SMP)

6.4.2 Semnale modulate in frecventa (SMF)

6.4.3 Spectrul semnalelor MP sau MF

6. SEMNALE MODULATE

6.4 Semnale modulate in faza si frecventa

Semnale modulate in faza MP

$$\varphi(t)=\varphi_p+g_m(t) \Rightarrow \boxed{x_{MP}(t)=X_p\cos\left(2\pi f_p t+\varphi_p+g_m(t)\right)}$$

Daca

$$x_m(t)=X_m\cos\left(2\pi f_m t+\varphi_m\right)$$

atunci

$$g_m(t)=\Delta\varphi\cdot\cos\left(2\pi f_m t+\varphi_m\right)$$

$$x_{MP}(t)=X_p\cos\left[2\pi f_p t+\varphi_p+\Delta\varphi\cdot\cos\left(2\pi f_m t+\varphi_m\right)\right]$$

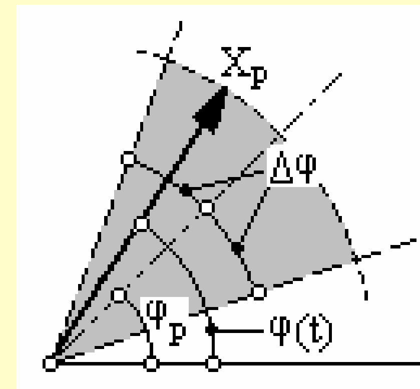


Figura 6.25. Diagrama fazorială.

6. SEMNALE MODULATE

6.4 Semnale modulate in faza si frecventa

Daca

$$x_m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_{m_k} \cdot \cos(2\pi f_{m_k} t + \varphi_{m_k})$$

atunci

$$x_{MP}(t) = X_p \cdot \cos\left[2\pi f_p t + \varphi_p + \sum_{k=1}^{\infty} \Delta\varphi_{m_k} \cdot \cos(2\pi f_{m_k} t + \varphi_{m_k})\right] \neq$$

$$\neq X_p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \cos\left[2\pi f_p t + \varphi_p + \Delta\varphi_{m_k} \cdot \cos(2\pi f_{m_k} t + \varphi_{m_k})\right]$$

MP este neliniara!!!

6. SEMNALE MODULATE

6.4 Semnale modulate in faza si frecventa

Semnale modulate in frecventa MF

$$f(t) = f_p + g_m(t)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\Phi(t)}{dt} \Rightarrow \Phi(t) = 2\pi f_p \cdot t + \varphi_p + 2\pi \int g_m(t)dt$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{MF}(t) = X_p \cdot \cos\left(2\pi f_p t + \varphi_p 2\pi \int g_m(t)dt\right)}$$

!!! Semnalul modulat în **frecvență** cu funcția *gm(t)* este echivalent cu semnalul modulat în **fază** cu integrala funcției *gm(t)*.

6. SEMNALE MODULATE

6.4 Semnale modulate in faza si frecventa

Daca

$$g_m(t) = \Delta f \cdot \cos(2\pi f_m t + \varphi_m)$$

atunci

$$x_{MF}(t) = X_p \cdot \cos\left[2\pi f_p t + \varphi_p + \frac{\Delta f}{f_m} \cdot \sin(2\pi f_m t + \varphi_m)\right]$$

$\beta = \frac{\Delta f}{f_m}$ **= indice de modulație**

$$x_{MF}(t) = X_p \cdot \cos\left[2\pi f_p t + \varphi_p + \beta \cdot \sin(2\pi f_m t + \varphi_m)\right]$$

6. SEMNALE MODULATE

6.4 Semnale modulate in faza si frecventa

Daca

$$x_m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_{m_k} \cdot \cos(2\pi f_{m_k} t + \varphi_{m_k})$$

atunci

$$x_{MF}(t) = X_p \cdot \cos\left[2\pi f_p t + \varphi_p + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{m_k} \cdot \sin(2\pi f_{m_k} t + \varphi_{m_k})\right] \neq$$

$$\neq X_p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \cos\left[2\pi f_p t + \varphi_p + \beta_{m_k} \cdot \sin(2\pi f_{m_k} t + \varphi_{m_k})\right]$$

MF este neliniara!!!

6. SEMNALE MODULATE

6.4 Semnale modulate in faza si frecventa

Modulatia in amplitudine MA = ***Modulatie liniara***

$\left\{\begin{array}{l}\textbf{Modulatia in pozitie MP} \\ \textbf{Modulatia in frecventa MF}\end{array}\right.$ = ***Modulatie neliniara***

6. SEMNALE MODULATE

6.4 Semnale modulate in faza si frecventa

Spectrul semnalelor modulate in frecventa MF

$$x_{MF}(t) = X_p \cdot \cos\left[2\pi f_p t + \varphi_p + \beta \cdot \sin(2\pi f_m t + \varphi_m)\right] =$$

$$= X_p \cos\alpha_p \cos(\beta \sin\alpha_m) - X_p \sin\alpha_p \sin(\beta \sin\alpha_m)$$

$$unde: \alpha_p = 2\pi f_p t + \varphi_p ; \alpha_m = 2\pi f_m t + \varphi_m$$

$$Daca \begin{cases} \cos(\beta \sin\alpha_m) = J_0(\beta) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(\beta) \cdot \cos(2k\alpha_m) \\ \sin(\beta \sin\alpha_m) = 2\sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(\beta) \cdot \sin[(2k+1)\alpha_m] \;, \\ (-1)^i J_i(\beta) = J_{-i}(\beta) \end{cases}$$

$$atunci \quad x_{MF}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_p J_n(\beta) \cdot \cos\Big(2\pi\big(f_p + nf_m\big)t + \varphi_p + n\varphi_m\Big)$$

6. SEMNALE MODULATE

6.4 Semnale modulate in faza si frecventa

$$x_{MF}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_p J_n(\beta)\cos\left(2\pi\left(f_p + nf_m\right)t + \varphi_p + n\varphi_m\right)$$

$$P_{MF} = P_{MP} = P_p = \frac{1}{2}\ X_p^2$$

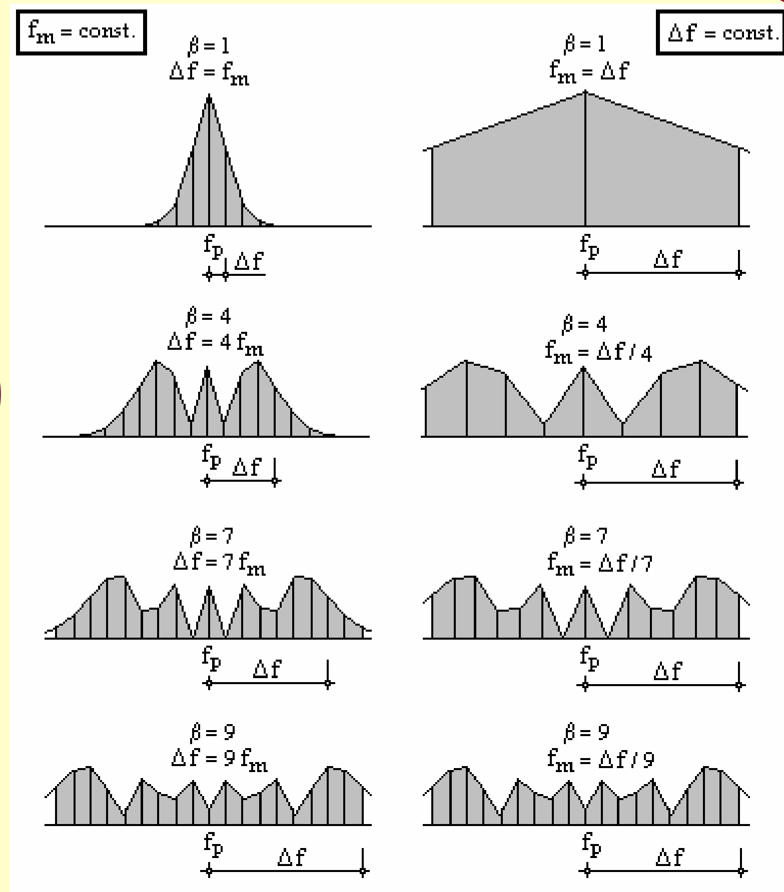


Figura 6.29. Spectrul semnalului MF.

6. SEMNALE MODULATE

6.4 Semnale modulate in faza si frecventa

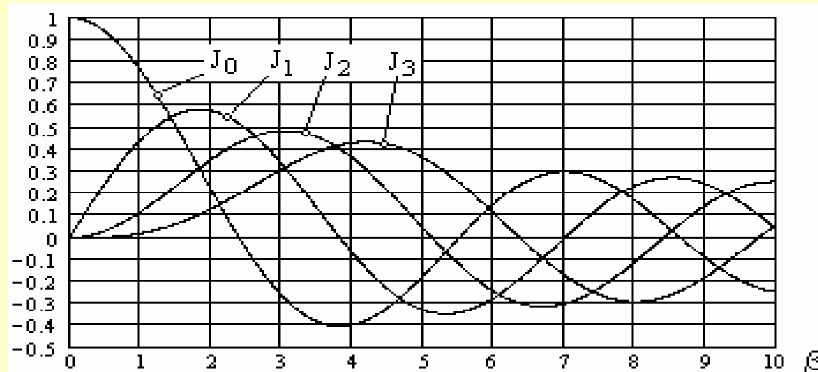


Figura 6.27. Funcții Bessel de speța I-a.

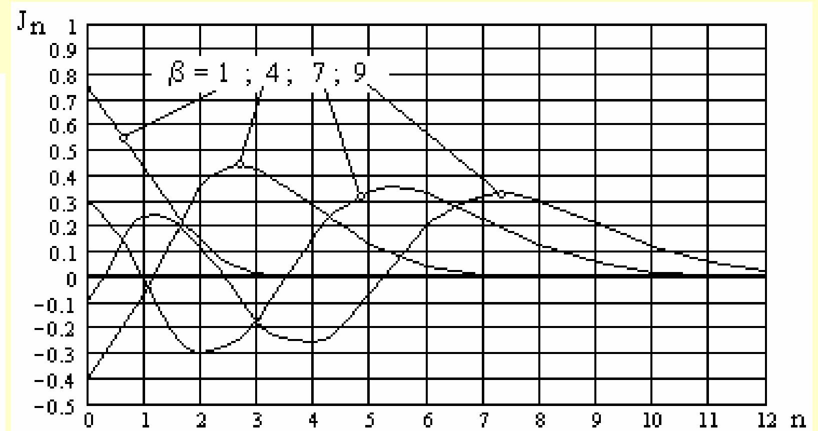


Figura 6.28. Funcții Bessel în funcție de indicele lor (n), având indicele de modulație β ca parametru.

6. SEMNALE MODULATE

6.4 Semnale modulate in faza si frecventa

SMF de banda ingusta - β<0.4

Daca $\beta < 0.4$

atunci $J_0(\beta) \cong 1\ ;\ J_{\pm 1}(\beta) \cong \pm\frac{\beta}{2}\ ;\ J_n(\beta) \cong 0\ ,$ *pentru* $n \geq 2$

$$si\ x_{MF}(t) = X_p \cos(2\pi f_p t + \varphi_p) + \frac{\beta}{2} \cdot X_p \cdot \cos\left[2\pi(f_p + f_m)t + \varphi_p + \varphi_m\right] - \frac{\beta}{2} \cdot X_p \cdot \cos\left[2\pi(f_p - f_m)t + \varphi_p - \varphi_m\right]$$

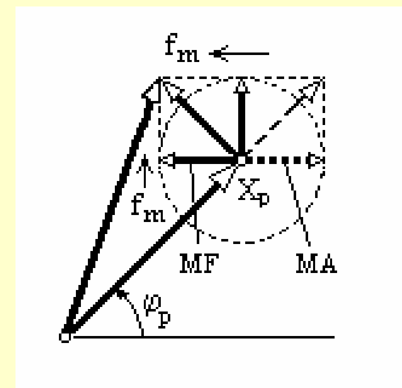


Figura 6.30. Diagramă fazorială.

6. SEMNALE MODULATE

6.4 Semnale modulate in faza si frecventa

SMF de banda larga -β > 0.4

$$B_{MF} = 2N\, f_m = 2(1+\beta) f_m$$

$$B_{MF} = 2\left(1+\beta+\sqrt{\beta}\right) f_m - relatia\ lui\ Manaev$$

$$B_{MF} = 2(f_{m\max} + \Delta f) = 2B_m + 2\Delta f - relatia\ lui\ Carson$$